N.º 1/84 — Esc. 150$00

técnica

Revista de Engenharia

Publicação da Associação dos Estudantes do Instituto Superior Técnico

técnica
revista de engenharia · aeist

PROPRIEDADE DA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

DIRECTOR — M. DE ABREU FARO

DIRECÇÃO E ADMINISTRAÇÃO — AEIST • AV. ROVISCO PAIS
1000 LISBOA • TEL. 889323/881018

PUBLICIDADE — QUINTUPLO — PROMOÇÃO PUBLICITÁRIA, LDA. • RUA DA TRINDADE, 5-1º Dto. • 1200 LISBOA • TEL. 323773/366445

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO — CABOGRÁFICA, LDA. • RUA DAS BISCOITEIRAS, LOTE 18 (TRASEIRAS) 2795 LINDA-A-VELHA

PUBLICIDADE TRIMESTRAL • 5000 EXEMPLARES

ASSINATURAS (4 N.os) PORTUGAL 450$00 • ESTRANGEIRO 1200$00

1 • 84

técnica
revista de engenharia · aeist

2 CARTA DOS EDITORES

3 EDITORIAL

artigos por convite

5 NORMAS DE CONSTRUÇÃO DAS CIDADES — O SISTEMA ESTRATÉGICO — ESTOCÁSTICO
M.L. DA COSTA LOBO

15 O PROBLEMA DE WIENER-HOPF E ALGUMAS DAS SUAS APLICAÇÕES
A. FERREIRA DOS SANTOS

artigos

29 FUNDAMENTOS DO VOO MAGNÉTICO. A ANÁLISE DE UM MODELO ELEMENTAR
J.F. BORGES DA SILVA

35 A ESCOLHA DA CLASSE DE INTENSIDADE DOS PÁRA-RAIOS PARA OS POSTOS DE TRANSFORMAÇÃO ALIMENTADOS POR LINHAS AÉREAS A MÉDIA TENSÃO
DOMINGOS MOURA

47 APLICAÇÃO DA VOLTAMETRIA CÍCLICA À CARACTERIZAÇÃO DE PROCESSOS DE ELÉCTRODO
M.A.G. MARTINS e C.A.C. SEQUEIRA

61 INVESTIGAÇÃO E DESENVOLVIMENTO. A CONTRIBUIÇÃO DO CURSO DE MINAS DO I.S.T.
LUÍS AIRES-BARROS

67 MAPAS DE MECANISMOS COMPETITIVOS DE RESPOSTA DE UM SISTEMA
M. AMARAL FORTES

notas científicas

73 A EQUAÇÃO RELATIVISTA DO MOVIMENTO DE UMA BARRA NÃO RÍGIDA
A. BROTAS e J.C. FERNANDES

76 MODEL VALIDATION IN THE ESTIMATION OF NON-STATIONARY SPATIAL PHENOMENA
HENRIQUE GARCIA PEREIRA

79 A VARIABLE METRIC PROJECTION METHOD FOR MINIMIZING GENERAL FUNCTION SUBJECT TO UPPER AND LOWER BOUNDS ON THE VARIABLES
MÁRIO J.A. LANÇA

82 THE ESTIMATION OF TRANSFER FUNCTION IN NATURAL RESOURCES EVALUATION
FERNANDO DE OLIVEIRA MUGE

Carta dos editores

Como é do conhecimento de todos, a revista TÉCNICA, cuja existência coincide praticamente com a do Instituto Superior Técnico, conseguiu, por força da qualidade e natureza dos artigos que publicou, uma posição de inequívoco interesse no plano editorial português e, muito particularmente, no domínio da engenharia e ciências básicas afins.

Tão simplesmente por razões económicas, faltando-lhe um fundo específico de apoio financeiro, a revista TÉCNICA defrontou uma situação de crescentes dificuldades que culminaram na interrupção da sua publicação em 1981 (n.º 462-463).

É-nos grato verificar que esta interrupção preocupou docentes e discentes desta escola e também muitos engenheiros que, na sua vida profissional, se tinham habituado à revista de engenharia que era a TÉCNICA.

Graças aos esforços dos actuais Corpos Gerentes da AEIST e à compreensão e apoio do Conselho Directivo do Instituto Superior Técnico, foi possível finalmente relançar a revista, e isto porque passou a dispor de um fundo expressamente consignado à sua publicação. Na realidade, era este o único factor de estrangulamento que condicionava a viabilização da revista uma vez que a TÉCNICA continua a dispor, como sempre dispôs, de uma valiosíssima e numerosa colaboração de cientistas e técnicos.

A revista TÉCNICA, nesta nova série, publica-se trimestralmente, sendo um dos objectivos fundamentais o seu crescimento material, quer pela extensão do conteúdo de cada número, quer por um maior número de publicações/ano. Qual a via ou vias que se optarão, isso será matéria a decidir através de critérios de economia de custos e prazos de execução.

Evidentemente que a qualidade e regularidade que se deseja para a TÉCNICA, resolvido que está o problema económico, encontra-se directamente ligada à comparticipação que todos queiram dar na construção dos sucessivos números que se seguirão. Nesta comparticipação, sendo importante a qualidade, interesse e oportunidade de artigos, não é menos importante que quem assumir essa colaboração cumpra rigorosamente os prazos exigidos por um calendário que nos esforçaremos por cumprir.

No que se relaciona com a qualidade material e gráfica isso respeita à Técnica, em si, que apenas deseja e pretende compreensão para as naturais dificuldades, as mais diversas, que terá que enfrentar numa operação de relançamento.

Letter from the editors

Owing to the scientific quality and nature of its articles, TÉCNICA, whose publication goes back to the first times of the IST, has occupied a very special place on the Portuguese editorial plane as well as in the domain of engineering and related basic sciences. However, for reasons of a purely financial order, TÉCNICA encountered growing difficulties which culminated in the interruption of its publication in 1981 (n.º 462-463).

Now, with the new efforts of Associação de Estudantes of Instituto Superior Técnico and the encouregement and help of Instituto Superior Técnico, it was possible to re-launch the journal which can now count on funds specially destined to its publication.

We are, therefore, initiating a new series of the review thus resuming our contact with readers, authors and advertisers. We regret and apologize for the lack of information in the meantime.

In this new series, TÉCNICA is publishing four issues a year.

The scientific contents of the review will fall into three sections: Invited papers (at the request of the editors), conventional scientific articles, and scientific notes.

Conventional articles, of a scientific or technico-scientific character, will be limited to 15 typed pages and written in Portuguese.

Scientific notes, meant to publish original results in scientific or technological research, will be limited to 8 typed pages and may be written in Portuguese or English.

The articles should be accompanied by a sheet supplying the name of the author, the title of the article, field of interest and an abstract.

The material sent to TÉCNICA will be examined by the directive body who will contact the author within 60 days upon receipt of the work informing him of the decision taken with regard to publication.

editorial

Este o primeiro número de uma nova fase da vida da Técnica
que esperamos e desejamos permanente e longa,
apenas marcada por uma crescente densidade e diversidade
de textos de qualidade.
Só por aqui se conseguirá a legitimidade que nos permitirá aumentar
o número de edições em cada ano, por agora quatro;
o que sendo manifestamente pouco traduz o possível.
Assim e desde já se enuncia um objectivo primeiro.

Chamarem-nos à comparticipação é sempre motivo de alegria, de honra,
de responsabilidade que nos preocupa mas se aceita.
Agradece-se pois à Associação de Estudantes do Instituto Superior Técnico
ter convidado para a direcção científica da revista
este professor que sou do Instituto Superior Técnico.
Não me singularizando tomei o facto como sinal,
mais um sinal, de relações antigas, frutuosas e francas que
desde os primeiros anos do Técnico sempre existiram entre
a Escola e a Associação de Estudantes.

Presta-se homenagem a todos aqueles que até hoje mantiveram e contribuíram
para o prestígio e realidade que é a Técnica
no âmbito da Engenharia Portuguesa.

Através de trabalhos de síntese, de artigos científicos e técnicos
e de comunicações breves, reduzidas ao essencial,
a Técnica oferece-se mais uma vez como um espaço aberto a cientistas e técnicos
com especial relevo para os docentes do IST e seus colaboradores,
nomeadamente estudantes.

Cresce e enriquece-se a Língua Portuguesa no seu uso e recurso para
exprimir a modernidade, nomeadamente o facto científico e técnico.
Sendo assim e porque o Português é um idioma do futuro,
não se adivinha vantagem que toda a Técnica
seja redigida em estrangeiro. Mas já se compreende e se admite essa modalidade
para as notas científicas.

Finalmente, terminamos como começámos.
A Técnica apenas dispõe de quatro números em cada ano. É pouco.
Para que cresça é necessário que cientistas e técnicos
publiquem na Técnica o melhor.
Tão bom como publicam e submetem a revistas estrangeiras.
Se assim for, apenas estimularemos os artigos por convite.
O resto deveria ocorrer, há-de ocorrer naturalmente como em qualquer
revista científica de qualidade.
E também como aí sucede, o que se publicar será objecto de prévios e
adequados pareceres de especialistas.
Que aquilo que se publique na Técnica seja fortemente desejável e não
exactamente fácil. Este o segundo objectivo que se enuncia e que
em boa verdade condiciona o primeiro: o crescimento da Técnica.

A Ferrominas
vai buscar minério onde o houver.
E também energia.
Além do ferro de Moncorvo,
seu primeiro objectivo no tempo,
a Ferrominas trabalha agora
para «acordar» o carvão.
Ele entrou nas suas prioridades.
É mais
uma fonte indispensável
de energia.

FERROMINAS.EP

FERROMINAS, EP
Projectos para um único projecto:
a recuperação do país.

técnica • 1984

	DATA DE PUBLICAÇÃO	LIMITE RECEPÇÃO ARTIGOS
N.º 1/84	15 a 31 Janeiro	
N.º 2/84	15 a 30 Abril	15 Fevereiro
N.º 3/84	15 a 31 Julho	15 Maio
N.º 4/84	15 a 31 Outubro	15 Agosto

NORMAS DE CONSTRUÇÃO DAS CIDADES — O SISTEMA ESTRATÉGICO-ESTOCÁSTICO

M. L. DA COSTA LOBO, Prof. IST

SUMÁRIO

A concepção dos regulamentos para a gestão do planeamento urbano. As raízes culturais e os problemas de concretização dos planos urbanísticos. A experiência portuguesa. O desenvolvimento urbano ilegal e formas de o encarar. Normas de tipo estratégico em vez de regulamentos de tipo determinístico. Um conceito estocástico para o controlo urbanístico. A opinião pública, a tomada de decisões e a monitorização do sistema.

ABSTRACT

Design of urban development norms. Cultural roots and planning implementation issues. Portuguese experience. Ilegal development and ways of dealing with it. Strategic normas versus deterministic norms. A stochastic approach of planning management. Public opinion and decision making monitoring of this system.

1. As regras da civilização

A construção da Cidade do Homem é uma actividade eminentemente interdisciplinar e de síntese. O continente físico e o conteúdo humano formam um todo que interactua. O engenheiro — arquitecto, chamado para a construção do continente, não poderá, contudo, salvo grosseiro erro de estratégia profissional, deixar de aprofundar os seus conhecimentos e a sua compreensão dos fenómenos que caracterizam o conteúdo, nomeadamente nas suas ligações com o meio físico. Tem que conhecer o Homem, a Sociedade, e compreender o referencial dos seus valores culturais, a sua civilização, nos seus aspectos gerais e de especificidade. Então, o urbanismo aparece-nos como uma ciência e uma arte, extraordinariamente alargada no seu âmbito interdisciplinar mas, simultaneamente, altamente exigente na sua especialidade. É por isso que o antigo engenheiro militar, o compositor habitual das cidades construídas no séc. XVII e XVIII (para não ir mais atrás), vai sendo substituído pelo engenheiro geral, o engenheiro — arquitecto, ou mais simplesmente arquitecto, e, mais recentemente, pelo urbanista. Esta especialidade pode fundar-se nas especialidades tradicionais de arquitectura e de engenharia civil ou noutras formações, desde que — qualquer delas — devidamente complementadas. Ora o tema deste artigo vai incidir sobre um problema particular do urbanismo — a sua normativa. Para evitar confusões deveremos distinguir as normas técnicas do desenho urbano, que podem orientar os compositores da Cidade, das normas jurídicas, que visam um pacto social entre as gentes, em primeiro lugar, e entre as populações e a própria administração pública, seguidamente. Neste último caso trata-se, afinal, das regras de jogo emanadas das instituições. A necessidade de regras onde há vários agentes em acção, como exclusivamente no caso da construção expontânea, em que são os futuros moradores a construir as suas casas pelas suas próprias mãos. Não havendo regras, explícitas ou implícitas, herdadas ou não da cultura local, então rapidamente se caminha para a disputa de interesses, para os atritos e para a desordem. Esta, finalmente, terá que reconduzir às regras, ao convénio, a uma forma de entendimento, a bem ou a mal. A cultura dos povos, a civilização, assimilando a experiência acumulada e as descobertas e criações eruditas, vai-se espalhando nas normas de construção das Cidades. Por isso mesmo, a identidade dos povos tem a ver com a expressão das suas cidades e aldeias, e a eventual perda dos seus valores de identificação acarreta desequilíbrios psicológicos, individuais ou mesmo colectivos, que não são inconsequentes.

Assim, parece recomendável que a sociedade e os seus governos façam incidir a sua atenção, com todo o cuidado, na estrutura normativa do sector urbanístico, que deverá, em cada momento, retratar o seu estádio de civilização, os seus conceitos culturais e a sua atitude política face aos valores individuais, colectivos e da comunidade em geral. Um sistema jurídico inadaptado, marginalizador de sectores da população, obsoleto, caído em desuso ou constantemente esquecido, é um sintoma de degradação da estrutura administrativa, um forte obstáculo ao progresso económico e social e uma fonte de arbitrariedades e possíveis oportunismos — por isso altamente anti-pedagógico para a Sociedade em geral (1).

2. Os objectivos e motivos das regras

As regras de construção das cidades podem ser directas ou indirectas (processuais) e relativas às suas

(1) Vide comunicação ao CSOP no dia Mundial do Urbanismo no dia 8 Nov. 82.

Original recebido para publicação em 4/10/83

formas ou aos seus usos. No fundo visam aspectos de relação com as forças da natureza e de relação entre as pessoas, entre as famílias, entre os grupos.

Em relação ao meio natural as regras deverão incluir dispositivos que garantam:

1 — O arejamento, a iluminação e a insolação dos locais de vivência, e, por outro lado, a protecção aos ventos e sombra. São aspectos que implicam soluções praticáveis de distanciaamento dos volumes de construção, da sua orientação e do seu alinhamento e área, o estudo dos enfiamentos de vistas e dos canais de arejamento, a determinação das sombras, a disposição das árvores, a implantação das cortinas e sebes arbóreas e arbustivas.

2 — O escoamento e drenagem das águas, o que determinará o respeito pelas linhas de drenagem e dos leitos de cheia, o equilíbrio das superfícies impermeáveis e das águas de infiltração e embalse, os dispositivos de colecta das águas e os descarregadores de superfície e de emergência.

3 — A solidez das fundações e o equilíbrio dos terrenos modelados, o que implica limites para a inclinação dos taludes, revestimentos adequados, contenção de terras e muros de suporte, observação de limites de tensão, selecção dos terrenos para construção.

4 — O equilíbrio ecológico, com a manutenção dum meio saudável e renovável, evitando-se a sua degradação. Esta pode assumir aspectos de poluição, de carência bio-química de oxigénio, de focos infecciosos e pestilentos de lixos e esgotos, de pragas e infestações, de doença e perda de fertilidade, de progressiva desertificação, de destruição de meios não renováveis.

No que respeita ao meio social, de relação entre as famílias e os grupos humanos, poderemos focar:

1 — O recato das pessoas e das famílias, em termos visuais e de audição, para evitar a promiscuidade e os atritos de relação, respeitar o sossego e a privacidade da vida de cada um, reduzir as questões emergentes de condições desfavoráveis de vizinhança.

2 — O acesso e as servidões para circular, para transportar, para implementação de redes e de dispositivos infra-estruturais, para estacionar.

3 — A delimitação da propriedade, com marcos, muros e sebes, e respectivas convenções e simbologia.

4 — As actividades exercidas, insalubres ou incómodas, a afastar das áreas residenciais, como é o caso de indústrias barulhentas, de efluentes poluidores ou mesmo tóxicos, ou de manipulação de produtos perigosos, (indústrias de explosivos ou nucleares).

5 — A segurança — facilidade de circulação e acesso, iluminação, visibilidade, dispositivos de alarme.

Desta explanação resulta que a necessidade das regras do primeiro tipo é geral, enquanto as regras do segundo tipo são progressivamente requeridas na medida em que a sociedade se urbaniza, no sentido de atingir maiores densidades, maior movimentação, mais intensas relações, mais complexa organização. Neste domínio, para além da lógica inerente a cada uma das regras, há uma componente essencialmente convencional, uma espécie de regra cívica que permite o entendimento social — um comportamento respeitado, assumido pela generalidade da população e garantido pelo poder judicial estabelecido.

3. A forma das regras e suas raízes

A cultura popular e a tradição foram através dos tempos assimilando regras simples de construção das cidades e, genericamente, dos espaços de povoamento.

1 — Algumas das primeiras regras teriam sido as de integração ecológica nos terrenos:

a — fugindo dos leitos de cheia e terrenos de sapal, com fraca capacidade de carga, com alta fertilidade e interesse agrícola, correndo o risco de inundações periódicas.

b — evitando as encostas com grandes declives, com riscos de erosão e escorregamentos, de dispendiosa modelação, de difícil acesso.

c — recusando as grandes altitudes, onde as neves e os gelos frequentes muito dificultariam a vida e as actividades económicas.

d — afastando-se dos ambientes doentios, infestados, expostos às intempéries (caso da proximidade de pântanos, de encostas voltadas a norte e desprotegidas).

e — não construindo sobre as dunas litorais não fixadas, onde as areias em poucas horas de vento poderiam soterrar uma casa ou descalçar as suas fundações.

f — poupando áreas de boa produção agrícola ou ricas em fruta, em vinho, em azeite, em cortiça.

g — respeitando os santuários naturais da caça e da vida selvagem.

h — não comprometendo a exploração de jazidas de minérios ou de solos com especial valor económico de extracção.

i — cuidando de não prejudicar nascentes e veios de água subterrânea.

2 — Outro conjunto de regras diriam respeito aos princípios de boa vizinhança:

a — aceitação de vedação entre terrenos, com muros mineiros.

b — responsabilidade do proprietário de montante quando aos muros de suporte de terras.

c — respeito pelos caminhos, evitando construções que os estrangulem.

d — servidão de passagem por terreno alheio para acesso a parcelas interiorisadas.

e — não tapamento de janelas dos visinhos com construções encostadas ao limite do lote ou excessivamente próximas.

f — respeito pela imagem sobre o espaço público, colocando os anexos e os galinheiros na parte de trás e cuidando da fachada e arranjo do terreno anterior, em termos aceites pelo senso comum e como forma de respeito pela colectividade que circula na cidade.

É claro que as regras enunciadas envolvem sempre a questão da noção de propriedade e dos seus conceitos radicais, que levam à convicção dum direito absoluto sobre "o que é meu"... Esta atitude acontece com mais frequência em meios rurais de baixa densidade, como é evidente, onde a experiência de conflitos de interesses entre vizinhos é diminuta, não tendo sido ainda suficientemente apreendida. A pouco e pouco, à medida que os tecidos urbanos se adensam, as regras entre vizinhos tornam-se necessidades evidentes e adquire-se o conceito de que não pode cada um fazer o que quizer no seu terreno. O respeito por terceiros entra então no jogo e o próprio direito da comunidade intervir na apreciação da composição dos imóveis edificados vai-se desenvolvendo. A imagem da rua, da cidade, interessa a todos, pode até escandalizar — assim se chega à noção da limitação dos direitos de cada proprietário no capítulo da própria expressão estética.

4. O desvio das regras

É curioso notar como a urbanização do Homem o vai fazendo esquecer-se daquelas regras básicas que o Homem Rural bem conhecia e respeitava. Assim, a tecnologia da drenagem e a civilização urbana, leva-o a esquecer as regras de respeito pelos leitos de cheia e a implantar casas e ruas em pleno vale (ver 3.1.a). Também a cidade e a carência de alojamentos conduz à invasão das encostas, com habitações marginais — caso das favelas e bairros de lata — por vezes sujeitas a desmoronamentos e a deslizamentos de terras por estratificação desfavorável (ver 3.1.b). Em relação ao caso das dunas (ver 3.1.c) é interessante referir as antigas armações de pesca e palheiros, construídos sobre estacas de madeira, permitindo o movimento da duna de forma racional (casos de Mira e da Tocha, por exemplo). Não faltam, porém, exemplos negativos de paredões que alteraram o equilíbrio da duna provocando o emagrecimento das praias, ou de pavimentações em zonas desabrigadas constantemente cobertas pela areia e obrigando à sua frequente remoção, já para não falar dos aglomerados engolidos pelo mar na sequência de obras de portos e outras intervenções na costa. As inundações dos campos e as enxurradas catastróficas e destruidoras de culturas e até de áreas residenciais também têm origem em acções imprudentes de implantação ou em obras e actividades a montante (caso dos desbastes florestais contribuindo para assoreamentos a juzante. Voltando às regras referenciadas em 3.1.a é sintomático como a tradição levava à implantação das construções nas orlas dos bosquedos, à beira das terras agricultáveis, de forma a integrar um conjunto de regras de prudência e de valor económico (fundações sobre terrenos mais firmes, área agrícola mais fértil poupada, zonas mais saudáveis para habitação, segurança contra eventuais inundações.

Em relação às regras de índole social poderá citar-se, como contraste, a promiscuidade de zonas urbanas marginalizadas — ruas inacessíveis pela sua estreiteza e traçado labirintoso, casas de dimensões insuficientes, distância deminuta entre janelas vizinhas, carência de infra-estruturas e de adequado encaminhamento dos efluentes.

Quando, pelo desfazamento entre as regras e a realidade social, grande parte da produção do tecido urbano é marginalizada, sai fora das regras por desvios de actuação administrativa ou pelo recurso à clandestinidade, então uma reflexão profunda e imediata parece exigível. A regra, como via de conduta e do comportamento social perde sentido. Haverá, então, que ter a coragem de denunciá-la e reconsiderá-la, no seu conteúdo, nos seus objectivos, nas suas consequências directas e indirectas, no contexto em que pode ser tornada obrigatória e em que a entidade responsável a pode, de facto, garantir.

A evolução cultural irá permitir ou impor a alteração de regras — que cairão em desuso ou darão lugar a novas formulações — pelo que alguns desvios iniciais irão ser integrados naturalmente, enquanto outros irão ser reprimidos e a sua experimentação tornará a comunidade mais fortemente negativa em relação à sua prática.

5. Das regras tradicionais às eruditas

Há regras que a cultura popular assimilou e fazem parte do conhecimento geral, aceitando-se por transmissão oral e como normas de conduta moral. É o caso do respeito pela propriedade e seus limites, assinalados por vedação ou marcos. Por outro lado, é o respeito das servidões de passagem, tanto em caminhos públicos como em propriedades particulares atravessadas. É o caso do suporte das terras que cabe sempre ao proprietário de montante. Também poderemos citar a água, tanto no sentido da sua drenagem, que não poderá ser impedida pelo proprietário de juzante, como no sentido da utilização de minas e correntes de água, que frequentemente é dividida (em termos de

horas de rega), pelos vizinhos mais próximos, não podendo ser açambarcada pelo proprietário de montante. Também é bem conhecida a regra do metro e meio de recúo de qualquer janela ou vão (a menos de frestas), em relação ao limite do terreno do vizinho. A abertura directa de vãos de janela sobre terreno vizinho. A abertura directa de vãos de janela sobre terreno vizinho cria uma servidão que, não sendo denunciada a tempo, impediria o proprietário lesado de construir qualquer muro ou obstrução encostado à sua extrema e que tapasse a janela, obrigando-o antes a recuar ao menos 1,5 m, segundo essa conhecida regra do Código Civil. Muitas das regras nascidas expontaneamente, por força da experiência acumulada e dos casos vividos, vão sendo a pouco e pouco incorporadas na legislação e passam a ser regras vinculativas aos olhos dos tribunais, por vezes aperfeiçoadas, ou tornadas de mais fácil aplicação, ou transmitidas sob uma forma juridicamente considerada mais perfeita, embora correndo o risco de perder um pouco da sua evidência aos olhos do consenso geral, no seu estádio próprio de cultura. Como deve entender-se, a passagem de regras emanadas da experiência dos povos para os articulados jurídicos faz-se lentamente, mas tem a vantagem de se ir consolidando permanentemente, assimilando-se aos próprios conceitos civilizacionais e logrando naturalmente o largo apoio das populações. Também algumas regras eruditas, pela sua tradução simples, pela sua lógica, pela consonância com o entendimento intuitivo das gentes e pela continuada aplicação podem, a pouco e pouco, introduzir-se no património da cultura geral dos povos, tornar-se um conhecimento aceite e até exigido por todos. Inversamente, as leis complicadas, prescritas a ritmo veloz, emanadas de lógicas exteriores à cultura e às realidades dos povos, não podem ser assimiladas generalizadamente, a menos de campanhas de educação e divulgação muito intensas. A sua eficácia implica esse esforço ou um poder central muito activo e dirigista, senão opressivo e dificilmente aceite pelas populações e pelos interessados.

A recomendação a extrair destas reflexões será, antes de mais, evitar um eruditismo que "descole" da cultura assimilada ou apreendível pela população em geral.

6. A legislação e os regulamentos dos planos de urbanização

Foi o DL 33921, em 1944, que introduziu em Portugal o processo extensivo de planeamento urbano e o seu controlo centralizado. O referido decreto apontava para o tipo de planeamento urbano nessa altura em voga, na sequência do urbanismo da Cidade Jardim de 1900 — reacção ao caos e congestionamentos urbanos da Revolução Industrial — e da própria Carta de Atenas de 1933. Os planos tratavam do zonamento da cidade, da área de alinhamento dos volumes de construção e da salvaguarda dos seus valores monumentais. A justificação incluia um busquejo histórico e de identificação cultural, e uma previsão de crescimento, normalmente baseada numa projecção demográfica de modelo exponencial ou, por vezes, simplesmente linear. O zonamento, bastante desagregado, contemplava diferentes tipologias habitacionais, o equipamento social, a Área Central (também designada por Centro Cívico e Comercial e onde se admitia uma utilização mista) e a Zona Rural de Protecção — coroa de largura constante (1 a 3 km) ao redor do perímetro urbano e que se assemelhava ao "Green Belt" dos "Master Plans" britânicos, tanto em moda. A operacionalidade dos Planos — designados por Anteplanos — baseava-se na sua aprovação pelo Ministério das Obras Públicas, o que tornava vinculativo o seu Regulamento. Esta peça, tendo como anexo indispensável a Planta de Zonas (funcionando esta como referência espacial para aplicação das regras), era a verdadeira base de controlo do desenvolvimento urbano, tanto para orientar o Município nas suas iniciativas como para apreciar as propostas do sector privado. Trata-se pois, essencialmente, dum Plano de Zonamento de tipo determinístico, ou imperativo. Para ilustrar o seu carácter referem-se, ao fim deste capítulo, regulamentos organizados segundo os princípios de então, a título ilustrativo e de exemplo.

A década de 60 viu crescer o desapontamento e a contestação face ao tipo de Regulamento referido. Nasceu, então, um novo tipo de Plano — o Plano de Estrutura. Visava: maior flexibilidade, menor definição espacial vinculativa, melhor inserção no conceito de plano-processo, capacidade de progressiva auto-definição e pormenorização, em tempo oportuno, formato mais adequado à sua formulação em espaços sub-regionais e à coordenação regional. As tensões profissionais e dos interesses em jogo foram-se agravando também em Portugal e, em 1971, substituído o DL 33921 pelo DL 560/71 (acompanhado pelo D 561/71). Embora o preâmbulo apontasse para uma nova figura de plano mais próxima do Plano de Estrutura, o articulado queda-se por um estilo mais próximo do antigo Plano de Zonamento e não introduz substanciais inovações conceptuais, mesmo nos aspectos em que parecia simples algum processo (por exemplo o conceito de planeamento concelhio, que ficou ausente da nova legislação). Forçando, porém, um pouco as disposições da legislação, verifica-se nos anos 70 uma tentativa de ultrapassar o velho esquema do Regulamento de Zonas (ainda que agora referenciado na Planta Síntese, por força do novo articulado legal) e surgem Planos com Regulamentos inovadores. A essência dessas propostas consiste em estabe-

lecer zonas coincidentes com unidades funcionais e não com áreas homogéneas, excepto nalguns casos de zonas industriais ou de outras carecidas de clara segregação do resto do tecido urbano. As regras passam a dizer mais respeito ao programa da unidade urbana e ao processo sequencial de estudos de pormenor e gestão do que a estabelecer tipologias próprias de cada zona. Também se ilustra esta nova fase do planeamento urbano com o exemplo de regulamentos constantes de Planos Gerais de Urbanização (vide lista no fim do capítulo).

O Plano Director Municipal — estabelecido pela lei 79/77, pelo DL 208/82, pela Portaria 989/82 e pelo Decreto Regulamentar 91/82 — é nova figura de planeamento, a montante dos PGU. Pode considerar-se um bloco onde se reune o Plano de Estrutura e o Planeamento Socio-económico, mas sem substituir os PGU, que esses continuam à espera de nova lei-quadro ou Lei Orgânica de Urbanismo, que codifique e remodele toda a legislação anterior, como, aliás, continua a ser anunciada.

De índole bem diversa e inovadora são algumas regras introduzidas sob a capa do D.L. 804/76, nomeadamente em relação às áreas de cedência lote a lote, ao tabelamento dos preços dos terrenos necessários à gestão dos processos de reconversão, à determinação das quotas-partes a pagar para as infra-estruturas por cada interveniente. É de notar, para além do DL referido, o caso do Plano de Pinhal de Frades, no Seixal, onde se consagrou o carácter regressivo do valor do terreno por m2 em função do tamanho da parcela do terreno e o valor progressivo em função desse tamanho, tanto no que respeita às áreas de cedência como às comparticipações para as infra-estruturas. Trata-se não só de dispositivos de redistribuição visando reduzir assimetrias sociais mas, além do mais, de medidas atinentes a ir ao encontro das realidades praticadas ou expontaneamente aceites pelo consenso público, assim se reduzindo, com pragmatismo, a reacção ao processo. Sem mais comentários referem-se, seguidamente, regulamentos de alguns Planos de Urbanização, que se consideram paradignáticos. O Plano de Londres-Greater London Plan — pode considerar-se um dos que mais largamente difundiram no Mundo e mais influenciaram as actividades do pós-guerra 1939/45. Os Planos de Braga e de Coimbra de Groer constituem exemplos de "know-how" importado nessa fase do pioneirismo urbanístico em Portugal, que muito influenciou outros Planos organizados pelo país fora. O Anteplano de Tondela da DGSU exprime a maturidade dos Serviços de Urbanização, que com esse Plano-Modelo tentaram estabelecer o protótipo do que deveria ser o planeamento urbanístico, obviamente ainda enquadrado na legislação então vigente — o DL 33.921. Outros regulamentos se poderão indicar para ilustrar as tendências de alteração de atitude dos profissionais neste sector, já alicerçadas na experiência acumulada:

Plano Almeida Garrett de Coimbra
Plano de Coimbra 74 *
Planos R. Auzella de Aveiro e do Porto
Plano Director de Lisboa
Plano de Figueiró dos Vinhos *
Plano de Évora (CIPRO)
Plano de Vilamoura 80 *
Plano de Reconversão de Vale de Milhaços *
Plano de Reconversão de Pinhal de Frades *

7. Prática do controlo urbanístico — actuação dos serviços técnicos e dos decisores ao nível local e central

É claro que os técnicos municipais sempre estiveram sujeitos a grandes pressões directas dos interesses que se jogam nas propostas de desenvolvimento urbanístico. Os técnicos privados frequentemente procuraram bater a concorrência, seja no campo do conhecimento e das influências, para conseguir um despacho mais rápido aos seus processos, seja na habilidade de rodear os articulados, para obter aprovação de projectos com maiores índices de utilização, portanto com maior área de construção, maior número de lotes, mais alta valia por m2 de terreno. O técnico camarário pode facilitar tais intentos ou tentar complicá-los. É, por outro lado, pressionado pelos próprios autarcas, a quem pode interessar o benefício de A e, talvez, o prejuízo de B, em termos pessoais ou partidários. O terreno é escorregadio e não é fácil manter objectividade. Doutras vezes até será indesejável mantê-la, dado o peso dos aspectos subjectivos e políticos. os casos de espécie e os problemas humanos envolvidos, por vezes pungentes, não facilitam as coisas.

Para citar exemplos vejamos alguns casos típicos:

Caso A — O Plano estabelece para a zona z a área de r/chão e dois andares e uma profundidade máxima de empena com 12m. Em termos de planeamento, o urbanista terá avaliado a população dessa zona Z (habitacional), pela simples conta

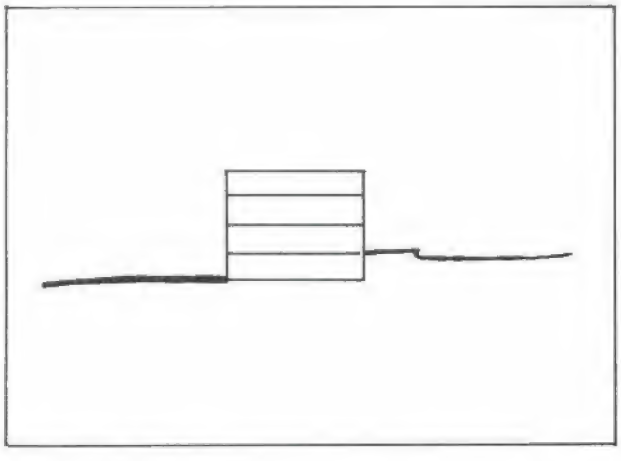
$P_Z = \frac{\sum A_j}{a_c} = \frac{12 x n x \iota}{a_c}$, onde 12 é a profundidade de empena, ι é a frente total de construção prevista, n o n.º de piros, a_c a área coberta por habitante (em média à roda de 30 m2 de área bruta de construção) e

* Planos orientados pelo autor

$\sum A_j$ a área total de pavimentos cobertos. Assim, supondo ι = 1000m a totalidade da zona Z, virá

$$P_Z = \frac{12x3x1000}{30} = 1200 \text{ hab.}$$

Vejamos, entretanto, o que poderá acontecer. Atendendo ao acidentado do terreno, os técnicos do promotor privado justificam uma cave, para aproveitamento do espaço disponível nos lotes situados a juzante da rua



Digamos que esta situação ocorre em metade dos lotes. Depois afirmarão que, para dar maior desafogo às habitações — sem aumentar o n.º de fogos — é aceitável passar a profundidade de empena para 13,2 m. Finalmente, defenderão junto dos autarcas que não há inconveniente em executar mais um piso, que será recuado para não prejudicar a área sobre a rua e que oferecerá a possibilidade de construir mais habitações a mais baixo preço perante uma situação de carência generalizada. Então, por cada m.ι ., teremos

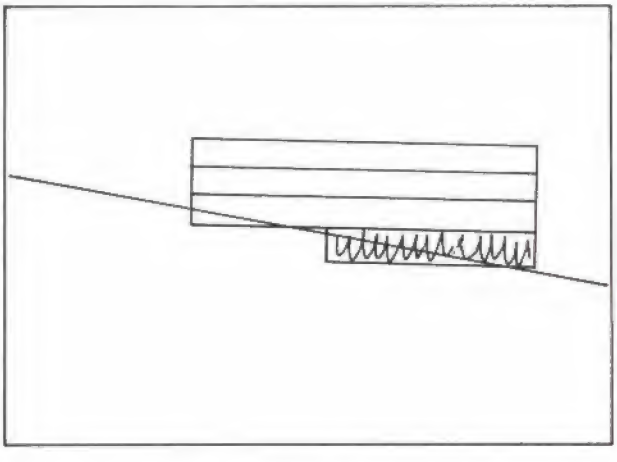
$$13{,}2x3 = 39{,}6 \text{ m2 nos três pisos, mais } \frac{13{,}2 \text{ m}^2}{2} \text{ na cave,}$$

mais 10,2 m2 no andar recuado, o que prefaz 56,4 m2. A capacidade populacional do bairro passa então para

$$\frac{56{,}4x1000}{30} = 1880, \text{ ou seja, um aumento superior a 50\%!}$$

Com certa habilidade dialéctica, porém, a cave e o andar recuado parecem não prevaricar contra o Regulamento e a maior empena surge como uma alteração não gravosa e apenas com a intenção de melhorar as condições de habitabilidade...

Caso B — O Plano dispõe como limite de área de construção o valor i =0,5, onde i é o índice de utilização do terreno ($i = \frac{\sum A_j}{S}$, aceitando que não se contabilize no A_j a área das garagens. Então o promotor passa a medir as áreas úteis de construção e não as brutas, alegando que essa forma é mais justa. No r/chão estabelece as garagens, que mais tarde serão transformadas em lojas. As varandas não contabilizadas serão fechadas mais tarde, com "marquises". As caves, apresentadas como plantas de fundações poderão mais tarde servir de arrumos para as lojas. Finalmente, um alegado engano do projecto, que assinalava o terreno como se fosse plano, justifica novo piso parcial, do lado mais baixo da rua,



a legalizar no fim da obra já feita.

Caso C — O Plano prevê 5 pisos em toda a rua. O interessado possui o lote de gaveto e alega que fica muito melhor um gaveto mais elevado, com 6 ou 7 pisos. Diz até que é corrente deixar construir mais um piso nos gavetos e aponta precedentes. Defende que a cidade precisa de se modernizar, de não criar dificuldades aos promotores. Ameaça ir investir noutro concelho mais permissivo. os vereadores acabam por ceder, mesmo contra o Plano e contra o parecer dos técnicos.

Estes apenas alguns exemplos, que poderiam multiplicar-se.

Os serviços centrais de tutela podem tomar várias atitudes. Nalguns casos são muito rigorosos, não aceitam interpretações habilidosas nem os compromissos já tomados pelas C.M.. Tornam-se incómodos, morosos, burocráticos, distantes das realidades locais. Noutras alturas, face ao fracasso de posições irrealistas assumidas em desacordo com o poder local e sem qualquer diálogo, os serviços centrais procuram agradar aos municípios e aceitam as propostas que eles apoiarem, mesmo de alteração frontal aos Planos. Noutros casos ainda, mais excepcionais, surgem a defender as pretensões dos promotores privados, mesmo contra a política camarária local, por vezes sensíveis às pressões desses promotores privados e doutras não dispostos a aceitar as atitudes decorrentes de caciquismos locais.

Tudo o que se expõe mostra a fragilidade do sistema e a necessidade cumulativa de grande conhecimento, de experiência no sector e de cumprimento duma deontologia profissional exigente. A divulgação pública das medidas, das informações e das decisões seria opção de grande valor para o progresso da prática urbanística, todavia difícil de conseguir dos poderes públicos constituídos.

Na caracterização do processo de controlo urbanístico podem sobressair os seguintes aspectos:

1 — Prática dos profissionais exercendo a profissão liberal, a sua deontologia e a sua qualificação e consistência colectiva.

2 — Cobertura da situação por parte dos técnicos do poder local, sua competência e enquadramento técnico-político.

3 — Relações de tutela com os organismos centrais.

4 — Receptividade dos interessados quanto às acções e opinião pública em geral.

5 — Organização dos serviços e andamento dos processos, com especial relevância para os "tempos de resposta" às solicitações e iniciativas.

À laia de conclusão pode afirmar-se que, para lá das boas vontades de muita gente, a estrutura existente é precária, propícia a desvios do poder e muito longe de exibir a eficiência e profissionalização exigíveis e desejáveis. Regras boas sem serviços eficazes não resolvem nada.

8. A prática da clandestinidade

A prática da clandestinidade deverá situar-se ao nível das ilegalidades que se procuram esconder. É o caso do aproveitamento interior duma habitação diferente do que fora aprovado, ou a ligeira subida do nível do telhado para fazer um sótão não previsto no projecto ou a execução duma cave além da área autorizada, ou até a construção duma casa em vale recôndito à margem da vigilância dos fiscais. Como é sabido, nos países mediterrânicos, a construção dita clandestina e o próprio loteamento ilegal são uma triste realidade em Portugal. Cresceram em ritmo acelerado na década de 60 e explodiram após 1974, tendo na base a intervenção de muitos oportunistas e na cúpula muita demagogia, numa altura de crescimento económico individual importante. Os loteamentos ilegais e as construções não aprovadas tornaram-se tão correntes e tão permitidas — ou toleradas — que a sua designação por actividade clandestina se tornou, de facto, inapropriada, embora generalizada.

Em princípio, o loteamento clandestino não tem regras ou, pelo menos, não obedece às regras da lei. Tem a liberdade de tudo o que é marginal. Na prática não é bem assim, já que o promotor tem que vender o produto, interessando-lhe imitar o produto legal, para mais fácil venda. Quando muito "esquece-se" de reservar as áreas de terreno necessárias ao equipamento social urbano e do respeito pelas zonas de interesse ecológico ou de enquadramento paisagístico, e, por vezes, estabelece vias com larguras insuficiente ou redes com capacidade subdimensionada. Além de prevaricarem pela falta de previsão do equipamento colectivo, que a lei regula com a P 678/73 (áreas de cedência para o domínio municipal), as construções realizadas clandestinamente também frequentemente pecam em aspectos como estes:

— Compartimentos com áreas abaixo da mínima.
— Compartimentos com arejamento insuficiente.
— Distância deminuta ao limite do lote.
— Desalinhamento, por vezes caóticos, das construções vizinhas.
— Diversificação insólita de expressões arquitectónicas.
— Construção excessiva de anexos e seu uso para fins inadequados, inclusivamente para habitação.
— Mistura de actividades incómodas com a habitação.
— Carência de condições de saneamento.
— Más fundações.
— Construção em linhas de água ou leitosa de cheia.

Muitos dos loteamentos clandestinos não são hoje em dia de origem rural, expontâneos. Têm por detrás grandes promotores, com gabinetes técnicos que eles controlam. Assim, as ruas até aparecem alinhadas, frequentemente com largura transversal satisfatório, sucedendo-se a marcação regular de lotes modulados. Os próprios construtores clandestinos também vão obedecendo a certas regras de senso comum e à liderança de indivíduos mais formados, que os há sempre em cada comunidade. Quando alguém foge dessas regras, tacitamente aceitáveis, é que o "clandestino" percebe que não tem posição moral para discutir com o vizinho e começa a desejar um plano formal, uma obediência às regras da lei. Torna-se então mais fácil a intervenção dos poderes públicos, com base no DL 804/76, visando a reconversão da zona e a criação de lotes, segundo normas que defendam a qualidade ambiente. O outro aspecto que motiva os interessados numa acção de rehabilitação ou reconversão da zona clandestina é a irregularidade legal que não permite vender, hipotecar e exercer outros actos relativos à propriedade. Há também o aspecto das infra-estruturas, que resulta das dificuldades postas pelos serviços públicos quanto a colocar as redes respectivas em áreas ainda não legalizadas. A clandestinidade é, assim, uma actividade marginal, não reconhecida pela lei, embora tacitamente aceite por muitos dos que nela estão envolvidos.

É na prática de reconversão de áreas clandestinas

que se encontra um campo muito experimental muito rico em matéria de comportamento humano e de descoberta dos valores culturais enraizados nessas comunidades, a partir dos quais se poderá reformular uma verdadeira codificação das regras de sociedade no domínio urbanístico.

9. Modelos de planeamento e gestão para as circunstâncias actuais

Os insucessos do sistema instalado de planeamento e a não observância das suas regras resulta em boa parte das brechas abertas entre os sectores da composição e da gestão dos planos, que permitem a infiltração de todos os oportunismos e das próprias alavancas da desagregação. Uma nova figura e prática do planeamento gestão impõe-se. O próprio formato das regras deverá ser revisto, tornando-se mais flexível no pormenor e defendendo com mais segurança o esencial. Este conceito implica a correcta definição de objectivos e de competência dos intervenientes a vários níveis. de facto, no extremo oposto ao do Plano Normativo e Regulamentar, cheio de dispositivos do que se pode e do que se não pode fazer, temos o Plano-Processo que dispõe fundamentalmente sobre o processo de apreciação, condução da cadeia de intervenções e das competências de decisão. Os poderes da entidade política, então fortemente descricionários, permitiriam — neste conceito — decidir sobre os méritos próprios de cada iniciativa, independentes das regras.

Por vezes defende-se, como alternativa possível, o que se designa por "Plano Negativo", que mais não é do que um Plano de Salvaguarda, absolutamente insuficiente, senão negativo na plena acepção do termo, se não se contiver num sistema de planeamento estratégico.

Um outro modelo que tem vindo a ser mais recentemente ensaiado é o Planeamento Negociado, que pressupõe uma forte capacidade de gestão e de administração dos poderes públicos, com a adopção de estratégias e medidas oportunas, grande poder de antecipação, meios e recursos financeiros e quadros muito competentes e activos (tanto mais quanto mais reduzido forem os meios). No caso português parece ser necessário formular os Planos com regras bem definidas e, a pouco e pouco, ir introduzindo espaço de manobra para negociação, eventualmente com dispositivos auto-reguladores, por outro lado permitindo flexibilidade através de normas com contrapartidas. Simultaneamente, parece também indispensável repor o sistema ao nível cultural dos utentes, enraizando as regras (tempo e ritmo de aplicação, por um lado, educação e divulgação, por outro, e ainda, por fim, muito pragmatismo e consonância com as realidades culturais e socioeconómicas).

Deve é ficar bem claro que as normas devem ser um instrumento do planeamento e não um seu substituto. Em paralelo estão as políticas fundiárias e o seu enquadramento legal (vide DL 794/76, DL 845/76, DL 152/82 e a própria portaria P 678/73), cuja consideração seria também importante mas cuja extensão e âmbitoa saem fora do programa deste artigo.

10. Planeamento Estratégico, Normativa Estocástica e Gestão Participada Negociada

Do que fica dito e após reflexão e experimentação aturadas, parece configurar-se, a pouco e pouco, a nova tipologia de planeamento urbanístico que — pelo menos — pode interessar aos países mediterrânicos (e a muitos outros em situação cultural e de desenvolvimento semelhante). O conceito fulcral é o da substituição dos Regulamentos Imperativos ou Determinísticos por Regulamentos Estratégicos ou Probabilísticos, baseados em regras flexíveis com contrapartidas auto-reguladoras e orientadas estrategicamente para atingir os objectivos, conhecido estatisticamente o comportamento das populações, tendências, num ou noutro sentido, através de dispositivos ou medidas apropriadas a uma acção de permanente ajustamento. Implica uma monitorização atenta e a capacidade de inflectir. A participação é aqui entendida em plenitude e inclui o conceito de negociação, para a qual, todavia, também devem ser estabelecidas regras de acção, com limitações e critérios de avaliação, hierárquica de competências, formas de recursos, dispositivos de emergência e indicadores de alarme. Assim, em vez de formular regras rígidas (por exemplo, estabelecendo que em dada rua não se pode ultrapassar o $i = 0{,}75$ por lote), as regras devem ser redigidas com certa latitude e incluirem obrigações de contrapartidas, variáveis, fixando uma área de cedência para a via pública e determinar pelo algoritmo $(i - 0.5) \times 2^{\alpha} \times S$ lote, com $\alpha = 1$, o que desencorajaria a ultrapassagem dos 0.75 (para este valor já a área de cedência seria de $(0.75 - 0.5) \times 2 \times S$ lote $= 0{,}5$ S lote e tornaria inviável $i > 1{,}0$ (de facto para $i = 1{,}0$ viria $S_{ced} = (1 - 0.5) \times 2\, S_{lote} = S_{lote}$.

Na prática talvez o índice acabasse por ficar à volta de $i = 0{,}75$. O conhecimento do mercado, do comportamento dos promotores, das dimensões dos lotes segundo as respectivas frequências, etc. poderia permitir um cálculo desse índice médio, indispensável para o Plano. Uma aturada monitorização permitiria, ainda e suplementarmente, editar novas regras oportunamente, quando o resultado final desejado estivesse a ficar fora da zona prevista pelo cálculo em cada momento conjuntural. Bastaria, por exemplo, aumentar ou diminuir o parâmetro de calibração α. Índices de utilização, áreas de terreno a ceder, comparticipação

em infra-estruturas, tempos de execução, limitações de valores, de renda, etc. são variáveis com que se poderá jogar, sem esquecer que, em todo caso, haverá quase sempre máximos e mínimos a respeitar.

11. A fronteira entre a objectividade e a subjectividade. A construção da opinião pública. O conceito de colegialidade

Para lá de todo o esforço de objectivação, racionalização e concretização das regras, elas conterão sempre uma dimensão preponderantemente convencional. Correspondem aos termos dum implícito "contrato" mais ou menos acordado ou imposto, com o valor implícito duma Regra em torno da qual se podem estabelecer os processos de convivência social e estabelecer decisões em que se reduz ao mínimo o carácter descriminatório de decisões do árbitro, do juiz. Esta faceta de convencionalidade, insuperável, não reduz a responsabilidade de regra e da sua adequação aos objectivos técnicos e sociais. A interpretação dessa adequação não pode, porém, eximir-se a muitos graus de subjectividade e de circunstancialidade. É típica a questão da apreciação do aspecto exterior das construções, que irão, progressivamente, dar forma à imagem da cidade. É questão de inegável significado colectivo e que justifica a intervenção dos poderes públicos constituídos na decisão àcerca da aparência exterior mesmo no caso das construções de iniciativa privada e destinadas exclusivamente ao usufruto do próprio.

No senso comum, que deve presidir ao estabelecimento das regras, não pode evitar-se a presença das modas (ou circunstancialismos). As modas, como se sabe, variam, e nas suas harmónicas há sempre variáveis periódicas que resultam da acção conjugada da rotina e da habitação, por um lado, e da contestação ao imobilismo ou ao abuso da imposição, ou simplesmente do cansaço das regras, por outro. Citemos, como casos típicos:

1 — A reacção à inovação, por exemplo com o surgimento da "arte moderna", hoje tão apreciada e ontem combatida.

2 — O revivalismo e as soluções "pastiche", hoje tão condenadas e no passado recomendadas.

3 — A introdução crescente da cor, posteriormente tão condenada, pelo seu uso e abuso, este conducente à regra do branco como cor única tradicional e racional em largas regiões de Portugal, actualmente posto novamente em causa e levando à reconsideração do estudo de "paletas" e até ao elogio do colorido forte de origem popular, opondo-se às timoratas cores claras preconizadas em muitos regulamentos dos anos 50.

4 — As marmorites e os azulejos, introduzidos com sucesso e depois banidas ou fortemente criticados.

5 — O bloco em altura como símbolo de progresso e duma inelutável tendência e a sua gradualmente decrescente popularidade e justificação.

6 — O abandono da solução de rua, com libertação dos blocos e da composição volumétrica, e o retorno ao conceito de rua, como imagem lógica, intelegível, tradicional.

7 — O lançamento de dialécticas e teorias, entre eruditos, com uma frequência aceleradamente crescente, fruto da concorrência, da investigação, duma certa ansiedade cultural, tendendo a afastar-se da generalidade da população cuja inércia cultural a tornam apegada a certas regras e onde as alterações constantes só causam perplexidade e apreensão, nomeadamente se as posições antagónicas são assumidas como idêntico radicalismo!...

Apesar de tudo, muitos casos há em que as regras são fundamentalmente lógicas, objectivas, não sendo de aceitar caprichos sem base. No próprio caso das modas, dos gostos, das tradições, dos costumes, poderá observar-se com a maior das objectividades que certos tipos de solução correspondem positivamente à sensibilidade das pessoas, na sua própria época, o que não acontecerá com outras soluções, que então serão insólitas, desagradáveis para a generalidade das pessoas, reprováveis no consenso dos mais cultos e especializados. É aqui que pode nascer o conceito de colégio "ad hoc", especializado e representativo da cultura do povo em questão, ao mais alto nível. Esses colégios, formados por um conjunto de pessoas generalizadamente consideradas cultivadas no campo em jogo, de dimensão suficientemente ampla para evitar o resultado aleatório duma eventual opinião pessoal ou momentânea, deverão ser empossados para dar pareceres sobre os aspectos de ordem estética ou outros do âmbito do subjectivo. É o dispositivo possível, dum modo geral recomendado e aceite para tal fim em todas as comunidades civilizadas.

É frequente encontrar grandes dúvidas nos casos específicos de conservação de tecidos urbanos antigos. A opinião pública está frequentemente deformada pela coincidência do antigo com o velho e obsoleto. Assim, não parece justo apreciar o antigo nem lhe dar uma oportunidade de ser julgado em estado de boa conservação e de recuperação, o que implica uma estratégia geral e uma apropriada táctica de acções pedagógica e de conservação.

12. Perspectivas do sistema estratégico de normativa estocástica e condições necessárias à sua operacionalidade. A monitorização

Um ensaio genérico sobre os Regulamentos dos Planos de Urbanização poderia terminar aqui. A utilidade prática que, todavia, se espera extrair destas

reflexões, recomendam certas prevenções que despistem desvios e desilusões inúteis. São estas razões que justificam este último capítulo. É que, na verdade, cada sistema só pode funcionar capazmente em determinadas condições. Parece razoável, por isso, esclarecer um pouco quais serão tais condições, para permitir a operacionalidade dum processo do tipo do exposto, sem prejuízo de adaptação menores ao caso específico e às circunstâncias conjunturais.

Da experiência tida na aplicação dos regulamentos dos Planos de Urbanização parece não haver dúvida de que são indispensáveis, a qualquer tipo de regulamentação:

1 — Rigor técnico-científico interdisciplinar.
2 — Assimilibilidade cultural.

Estas condições são pressupostos para a eficácia, isto é, para que as regras conduzam aos resultados pretendidos.

Para se atingir rigor técnico haverá que desenvolver métodos próprios, com base em observações estatísticas, devidamente analizadas. Sugerem-se os seguintes métodos:

1 — Análise de correlações estatísticas.
2 — Métodos comparativos.
3 — Modelos analógicos.
4 — Método de envelopes e iterações.

Qualquer dos métodos, especialmente o último, implica um sistema de monitorização bem organizado, tanto no dispositivo de recolha de dados factuais como nos de auscultação das populações, divulgação de informação, tratamento dos dados por processos expeditos, tomadas de decisões.

Para lá da base científica, o enraizamento das regras na cultura popular é um dos objectivos principais, pelo que a permanente divulgação e auscultação e uma evolução com o ritmo adequado (nunca precipitado) são condições essenciais.

Outro aspecto importante é a formação dos técnicos e a sua reciclagem de modo a não se criarem atritos desnecessários ao progresso do sistema e a não se deixarem de ter em conta a participação dos interessados e muitos outros valores não técnicos mas de significado humano profundo.

Por detrás da concretização das regras e da sua gestão haverá, pois, que estabelecer uma estratégia pragmática, ou, o que é o mesmo, há que traçar um Plano. Como é óbvio, e já se afirmou, as regras nunca substituem um Plano. Assim, a primeira condição é ter uma atitude de planeamento, que os políticos deverão assumir convictamente e com todas as suas consequências.

Convirá frizar que não se deverão adoptar regras sem um estudo prévio da viabilidade da sua implementação e das suas consequências e efeitos laterais. Um lançamento fracassado pode desprestigiar os processos e tornar inviável o seu relançamento por muitos anos. Daqui a relevância de estudar, com toda a minúcia não só as regras mas a forma da sua gradual integração no desenvolvimento dos Planos Urbanísticos. Estas simulações e programação estratégica não têm constado do planeamento, com graves consequências. No fundo, e em termos práticos, o lançamento de um sistema de planeamento integrador duma regulamentação probabilística exige órgãos centrais de orientação estratégica das acções e de permanente — mas cauta — recalibração dos parâmetros das regras, de forma a não se perder eficácia no processo ao longo dos anos. É nesses órgãos centrais, devidamente interligados e de pequena dimensão cada um, que devem existir a disponibilidade de informação e a capacidade do seu tratamento para as simulações oportunas e para as tomadas de decisão em tempo útil.

BIBLIOGRAFIA

M.L. DA COSTA LOBO, Prof. Eng.

— "Planos de Urbanização — Tipologia, Motivação. Objectivos. Resultados Esperados". in ARQUITECTURA, Maio 1979.
— "Planeamento Físico. Conceitos" in Seminário sobre Planeamento Concelho — Comissão de Coordenação da Região Centro, Julho 1982.
— "As perspectivas da vida familiar e das comunidades humanas face aos espaços oferecidos pelos tecidos urbanos" — Coimbra 81.
— "Necessidades e Aquisição de Solo" (c/ P. Dias Correia) in Jornadas Luso-Suecas, Março 1981.
— "Technologie et économie de l' Habitat" in Congresso da FIHUOT, Lisboa 1983.

LUÍS BRUNO SOARES, Arq.

— "Ordenamento do Território" — O PLANO NEGATIVO — in Poder Local, 1983.

NUNO PORTAS, Arq.

— O Plano Director Municipal — um novo instrumento de administração urbana e local — Seminário de Normas Urbanísticas, Coop Luso-Saueca, 79.

FERNANDO GONÇALVES, Arq.

— Base para uma Normativa Urbanística Portuguesa Lisboa, 1982.

A. FALUDI

— "Planning Theory" — Oxford, Pergamon Press, 1973.

P. DAVIDOFF

— Advocacy and Pluralismo in Planning — J. of thi AIP — 31, 1965.

O PROBLEMA DE WIENER-HOPF E ALGUMAS DAS SUAS APLICAÇÕES

A. FERREIRA DOS SANTOS, Prof. IST — Dep. Matemática

SUMÁRIO:

No presente artigo estuda-se o problema de Wiener-Hopf (problema de Riemann-Hilbert para a recta real) e abordam-se algumas das suas aplicações mais importantes. Não se recorre à hipótese habitual no estudo do problema de Wiener-Hopf da existência de uma faixa comum de analiticidade das funções intervenientes e também não se faz depender a teoria da sua formulação em termos da equação integral de Wiener e Hopf o que visa uma mais fácil aplicação a problemas de fronteira relativos a equações diferenciais parciais. No que respeita a aplicações, além de uma referência a equações integrais, abordam-se dois problemas clássicos da área da propagação de ondas: difracção de uma onda plana electromagnética ou acústica por um semiplano e dispersão de uma onda aquática de superfície por uma doca num mar infinitamente profundo. O material apresentado é conhecido mas a exposição é original em vários aspectos e a sua forma foi ditada pelo objectivo de inclusão das aplicações mais importantes do problema de Wiener-Hopf.

ABSTRACT:

In the present article the Wiener-Hopf problem i.e. the Rieman-Hilbert problem for the real line is studied and some of its important applications are considered. The usual hypothesis, in the study of the Wiener-Hopf problem, of existence of a common strip of analyticity of the functions involved is not made and the theory is presented without referring it to the integral equation of Wiener and Hopf which facilitates its application to boundary problems for partial differential equations. In what concerns applications, besides a brief reference to integral equations, two classical wave propagation problems are considered: diffraction of an electromagnetic or accoustic wave by a semi-plane and scattering of a surface water wave by a semi-infinite dock on the surface of an infinitely deep sea. The material presented is known but the exposition is, in several aspects, original and its form dictated by the objective of covering the most important applications of the Wiener-Hopf problem.

1. INTRODUÇÃO

O presente artigo aborda um problema clássico da teoria das funções analíticas de uma variável complexa que encontrou um vasto campo de aplicações em Física e Engenharia especialmente na resolução de problemas envolvendo equações integrais e equações diferenciais parciais. O referido problema é um caso especial de um problema conhecido na literatura matemática por problema de Hilbert ou de Riemann-Hilbert [5], [11], [15] e formula-se geralmente do seguinte modo: Determinar duas funções ϕ^+ e ϕ^- contínuas, nos semiplanos $\mathrm{Im}(z)\geqslant 0$ e $\mathrm{Im}(z)\leqslant 0$, respectivamente, e analíticas nos seus interiores ($\mathrm{Im}(z)>0$, $\mathrm{Im}(z)<0$, resp.) e satisfazendo sobre o eixo real à equação

$$\phi^+(x)=G(x)\phi^-(x)+F(x) \qquad \text{(A)}$$

em que F e G se supõem contínuas sobre $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ designa como habitualmente a recta real).

O problema enunciado adquiriu considerável importância fora do contexto estrito da teoria das funções de uma variável complexa com a apresentação em 1931 do trabalho de Wiener e Hopf sobre a resolução da equação integral [13]

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^\infty k(t-t_0)\,\varphi(t_0)\,dt_0, \quad t\in[0,\infty[\qquad \text{(B)}$$

em que as funções f e k são dadas e se supõem integráveis em $[0,\infty[$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Como é bem conhecido, se a equação (B) e o integral que nela figura fossem considerados não em $[0,\infty[$ mas em toda a recta real e a sua solução procurada no espaço das funções integráveis em $\mathbb{R}$, então o problema resumir-se-ia à aplicação da transformação de Fourier àquela equação obtendo-se uma equação algébrica na transformada de φ que se resolve sem dificuldade desde que a transformada de k, K, satisfaça à condição $1-K(\omega)\neq 0$ em toda a recta real.

Wiener e Hopf mostraram que a equação (B) pode ser resolvida explicitamente introduzindo uma nova função desconhecida igual ao 2.° membro de (B) para $t<0$; por aplicação da transformação de Fourier obtém-se uma equação do tipo de (A) i.e. um problema de Wiener-Hopf. A análise das condições de solução deste problema fornece condições necessárias e suficientes para a existência e unicidade da solução

Original recebido para publicação em 11/10/83

da equação (B) como veremos no parágrafo 3. A condição $1-K(\omega)\neq 0$ aparece de novo mas já não chega para assegurar a existência e unicidade da solução.

O trabalho de Wiener e Hopf parece ter sido motivado predominantemente pelo estudo de filtros óptimos para a detecção de sinais na presença de ruído mas encontrou rapidamente aplicações no estudo de problemas de radiação e difracção de ondas [8], no estudo de fenómenos de transferência de radiação em reactores nucleares [3] e mais recentemente em problemas de controlo [4].

Pela sua importância em Engenharia, daremos, no presente artigo, maior ênfase à aplicação do problema de Wiener-Hopf na resolução de problemas de fronteira relativos a equações diferenciais parciais e, em particular, à equação de Helmholtz. Das diversas aplicações merece referência especial a difracção de uma onda plana por um semiplano que é o problema mais fundamental da teoria da difracção de ondas por objectos com arestas e cuja resolução é talvez responsável pelo grande interesse que despertou o método de Wiener-Hopf entre os investigadores que trabalham na área da propagação de ondas electromagnéticas ou acústicas.

Infelizmente o método de Wiener-Hopf permite obter soluções exactas somente para problemas de fronteira relativos a geometrias muito simples como as que se consideram nos parágrafos 4 e 5. O método é, todavia, susceptível de fornecer soluções aproximadas para geometrias mais complicadas [7], [9], [12] e este é um tema que ainda constitui objecto de investigação. A este respeito pode, no entanto, perguntar-se se nestes casos não é preferível utilizar um método puramente numérico para resolver a equação diferencial. Em geral não é de facto assim porque, por um lado, os métodos numéricos se adaptam mal à resolução de problemas de fronteira relativos a regiões não limitadas e, por outro, porque na resolução de problemas da classe dos apontados acima pode cair-se em sérias dificuldades de convergência porque a condição matemática que garante a unicidade da solução (em regra a integrabilidade da solução na vizinhança da aresta) não é fácil de introduzir nos métodos numéricos.

Para terminar esta introdução faremos a seguir uma referência ao plano do artigo.

No parágrafo 2 faz-se a teoria do problema de Wiener-Hopf sem recorrer à hipótese clássica de existência de uma faixa comum de analiticidade das funções que aparecem na equação (A). No seu trabalho original Wiener e Hopf admitiram a existência de tal faixa mas esta hipótese não é necessária como se sabe do estudo do problema de Riemann-Hilbert [5], [11] e como mostrou M.G. Krein no seu trabalho [9] sobre a equação integral (B). A hipótese que se faz no parágrafo 2 da existência da derivada em $\mathbb{R}$ das funções F e G é um pouco mais restritiva do que seria necessário mas obviamente muito menos restritiva do que a condição de existência de uma faixa de analiticidade atrás mencionada.

No parágrafo 3 aborda-se o problema clássico da equação integral de Wiener-Hopf sem preocupação de se ser exaustivo porque tal seria incompatível com a dimensão deste artigo. Todavia trata-se o problema fundamental da equação com índice nulo e faz-se referência a alguns resultados complementares. O leitor interessado nesta matéria pode consultar o artigo de M.G. Krein [9] que praticamente esgota o assunto.

Nos parágrafos 4 e 5 apresentam-se duas aplicações a problemas clássicos de interesse em Engenharia: difracção de uma onda plana electromagnética por um semiplano condutor e dispersão de uma onda de superfície num mar infinitamente profundo e na presença de uma doca semi-infinita. O problema da difracção de uma onda por um semiplano é particularmente interessante porque ilustra a necessidade de introduzir uma condição de comportamento da solução na vizinhança da aresta para garantir que o problema matemático não tem soluções sem sentido físico.

2. O PROBLEMA DE WIENER-HOPF

Neste parágrafo vamos formular e resolver o problema de Wiener-Hopf que enunciamos na Introdução de forma sucinta e sem preocupações de precisão.

2.1. — **Formulação e método de resolução** — Sejam Π^+ e Π^- os semiplanos complexos fechados, respectivamente, superior ($\mathrm{Im}(z)\geq 0$) e inferior ($\mathrm{Im}(z)\leq 0$). Designaremos por H^+ e H^- respectivamente, os espaços das funções contínuas e limitadas em Π^+ e Π^- e analíticas nos seus interiores, $\mathrm{int}(\Pi^+)$, $\mathrm{int}(\Pi^-)$. Com esta notação o problema de Wiener-Hopf formula-se como segue:

Problema 1. Determinar duas funções ϕ^+ e ϕ^- pertencentes, respectivamente, a H^+ e H^- e tais que

$$\phi^+(\lambda) = G(\lambda)\,\phi^-(\lambda) + F(\lambda), \qquad \lambda \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

em que F e G são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ e satisfazem a

(I) $G(\lambda)\neq 0, \quad \lambda\in\mathbb{R}$ e $G(\lambda)\to 1$ quando $|\lambda|\to\infty$

(II) $|F(\lambda)| < A\,|\lambda|^{-p}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}\ (A,p>0)$

Impõe-se ainda a ϕ^+ e ϕ^- a condição

$$|\phi^{\pm}(z)| \to 0 \text{ quando } z\to\infty, \qquad z\in\Pi^{\pm}$$

Para motivar o leitor em relação ao conteúdo do ponto 2.2 vamos esboçar a seguir o método de resolu-

ção deste problema. Suponhamos que é possível factorizar G de acordo com a fórmula

$$G(\lambda) = G^+(\lambda)G^-(\lambda)$$

em que $G^{\pm} \in H^{\pm}$ e não se anulam nos respectivos semiplanos de analiticidade. Então podemos escrever (1) na forma

$$\phi^+(\lambda) / G^+(\lambda) = G^-(\lambda)\phi^-(\lambda) + F(\lambda) / G^+(\lambda) \quad (2)$$

Se pudermos agora decompor F/G^+ na soma de duas funções uma pertencente a H^+ e outra a H^-, i.e.

$$F(\lambda) / G^+(\lambda) = S^+(\lambda) - S^-(\lambda)$$

podemos escrever (2) na forma

$$\phi^+(\lambda) / G^+(\lambda) - S^+(\lambda) = G^-(\lambda)\phi^-(\lambda) - S^-(\lambda)$$

Mas o primeiro membro desta igualdade é contínuo em Π^+ e analítico no seu interior o mesmo se dizendo do 2.° membro relativamente a Π^-. Então pelo teorema do prolongamento analítico definem uma mesma função analítica em todo o plano i.e. uma função inteira, digamos E. Veremos adiante que se F, G, ϕ^+, ϕ^- satisfizerem às condições impostas atrás ambos os membros de (2) tendem para zero quando $\lambda \to \infty$ nos semiplanos em que são contínuas o que implica que $E=0$ (uma função inteira majorada por uma constante em todo o plano é constante).

Deste modo

$$\phi^+(\lambda) = S^+(\lambda)\, G^+(\lambda)$$

$$\phi^-(\lambda) = S^-(\lambda) / G^-(\lambda)$$

ficando assim determinadas as funções ϕ^+ e ϕ^-.

Passemos então aos problemas da factorização e decomposição de funções contínuas com que deparamos atrás.

2.2. Teoremas da decomposição e da factorização

Teorema 1 (Decomposição): Seja $F: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função absolutamente contínua em $\mathbb{R}$, com derivada limitada e tal que, quando $|\lambda| \to \infty$, $F(\lambda) = 0(|\lambda|^{-p})$ com $p > 0$. Então.

(I) O integral

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \qquad (3)$$

é convergente e define uma função analítica em $\mathbb{R}$;

(II) Para todo o $x \in \mathbb{R}$ existem os limites de $\varphi(x+iy)$ quando $y \to 0^+$ e $y \to 0^-$ e, sendo ϕ^+ e ϕ^- as funções definidas por

$$\phi^+(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \lim\limits_{y \to 0^+} \varphi(z+iy), & \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

$$\phi^-(z) = \begin{cases} \varphi(z), & \mathrm{Im}(z) < 0 \\ \lim\limits_{y \to 0^-} \varphi(z+iy), & \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$$

ϕ^+ e ϕ^- são contínuas em Π^+ e Π^-, respectivamente;

(III) Quando $z \to \infty$ $\varphi(z) \to 0$;

(IV) ϕ^+ e ϕ^- satisfazem a relação:

$$F(\lambda) = \phi^+(\lambda) - \phi^-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Demonstração

A convergência do integral (3) para $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ resulta imediatamente da forma da função integranda e da condição satisfeita por $F(\lambda)$ quando $|\lambda| \to \infty$; existe A_1 tal que

$$\left| \frac{F(\lambda)}{\lambda - z} \right| < A_1 |\lambda|^{-p-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \ (p > o)$$

o que implica a convergência absoluta do integral (3). Para demonstrar a analiticidade de φ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ vamos provar que é legítimo derivar sob o sinal de integral i.e. que o integral

$$\varphi_1(z) = \frac{}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - z)^2}\, d\lambda, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

é igual a $\varphi'(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Seja z_0 um ponto qualquer pertencente a $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

Temos

$$\varphi_1(z_0) - \frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{\lambda - z_0} \left[\frac{1}{\lambda - z_0} - \frac{1}{\lambda - z} \right] d\lambda =$$

$$= -\frac{z - z_0}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - z)^2 (\lambda - z_0)}\, d\lambda$$

que tende para zero quando $z \to z_0$ e, portanto $\varphi_1(z_0) = \varphi'(z_0)$.

Passemos então à proposição (II). Seguiremos neste ponto, aparte pormenores de cálculo, um trabalho de Sebastião e Silva [16] sobre a transformada de Stieltjes.

Atendendo a que F é diferenciável e que podemos derivar sob o sinal de integral em (3) temos:

$$\varphi''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{(\lambda - z)^3} \, d\lambda$$

e integrando por partes

$$\varphi''(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F'(\lambda)}{(\lambda - z)^2} \, d\lambda \ , \quad z \in \mathbb{C} \ \mathbb{R} \qquad (4)$$

Dado que F' é limitada, pondo $M = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} |F(\lambda)|$ e $z = x + iy$ de (4) obtemos a majoração

$$|\varphi''(z)| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\lambda}{(\lambda - x)^2 + y^2} = \frac{M}{2|y|}$$

resultado que, para $z \in \text{int}(\Pi^-)$, nos permite obter sucessivamente

$$|\varphi'(z) - \varphi'(i)| = \left| \int_i^{x+i} \varphi''(\tau) d\tau + \int_{x+i}^{x+iy} \varphi''(\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{M}{2} (|x| + |\ln y|), \quad y > 0$$

$$|\varphi(x+iy_1) - \varphi(x+iy_2)| = \left| \int_{x+iy_1}^{x+iy_1} \varphi'(\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \frac{M}{2} (y_2 |\ln y_2| - y_1 |\ln y_1| + k(y_2 - y_1)|x|), \ 0 < y_1 < y_2$$

em que k é uma constante positiva.

Tendo em atenção que $y \ln y \to 0$ quando $y \to 0$, da desigualdade anterior resulta (critério de Cauchy) que existe $\lim_{y \to 0^+} \varphi(x+iy)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$. Resulta ainda que a convergência é uniforme, relativamente a x, em qualqwuer intervalo finito, consequentemente a função ϕ^+ definida por

$$\phi^+(z) = \lim_{y \to 0^+} \varphi(z+iy) \ , \quad \text{Im}(z) = 0$$

$$= \varphi(z) \ , \quad \text{Im}(z) > 0$$

é contínua em Π^+. Analogamente se conclui que ϕ^- definida por

$$\phi^-(z) = \lim_{y \to 0^-} \varphi(z+iy) \ , \quad \text{Im}(z) = 0$$

$$= \varphi(z) \ , \quad \text{Im}(z) < 0$$

é contínua em Π^-.

Para demonstrarmos (III) vamos começar por provar que $\varphi(z) \to 0$ no sector $\epsilon < \arg(z) < \pi - \epsilon$, $0 < \epsilon < \pi / 2$. Sendo F_1 uma primitiva de F, de (3) obtém-se

$$|\varphi(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|F_1(\lambda)|}{(\lambda - x)^2 + y^2} \, d\lambda$$

$$\leq \frac{A}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-p+1}}{(\lambda - x)^2 + y^2} \, d\lambda + \frac{A}{2\pi} \int_0^\infty \frac{\lambda^{-p+1}}{(\lambda + x)^2 + y^2} \, d\lambda$$

em que A é uma constante. Calculando os integrais anteriores pelo teorema dos resíduos obtém-se

$$|\varphi(z)| < A_1 \frac{|z|^{-p}}{\sin \theta}, \ 0 < \theta \ \pi$$

em que A_1 é uma constante dependente de A e de p e $\theta = \arg(z)$. Concluimos, pois, que $\varphi(z) \to 0$ quando $z \to \infty$ no sector $\epsilon < \theta < \pi - \epsilon$ com $0 < \epsilon < \frac{\Pi}{2}$. Falta-nos ainda provar que $\varphi(z) \to 0$ quando $z \to \infty$ em Π^+ i.e. para $0 \leq \theta \leq \pi$. Para isso, fazemos em (3) a mudança de variáveis $w = -1/z$, $\mu = -1/\lambda$; então

$$\varphi\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{w}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(-\mu^{-1})}{\mu(w - \mu)} \, d\mu$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(-\mu^{-1})}{(w - \mu)} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{(-\mu^{-1})}{\mu)} d\mu \quad (5)$$

em que os integrais são entendidos no sentido de valor principal. Atendendo a que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu}{\mu - w} = 1 \ , \quad w \in \text{int}(\pi^+)$$

de (5) vem

$$\varphi\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(-\mu^{-1}) - F(0)}{w - \mu} \, d\mu + C \quad (5.a)$$

em que

$$C = -F(0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{F(-\mu^{-1})}{\mu} \, d\mu$$

é uma constante. Em|(5.a) $F(-\mu^{-1})$. F(0) satisfaz a todas as condições da proposição (II) $(F(-\mu^{-1}) - F(0)$ é absolutamente contínua com derivada limitada e $0(|\mu|^{-1})$ quando $|\mu| \to \infty$); então existe

$$\lim_{w \to 0} \varphi\left(-\frac{1}{w}\right)$$

Mas $\varphi(-\frac{1}{w}) \to 0$ quando $w \to 0$ com $\arg(w) \in [\epsilon, \pi - \epsilon]$. Como o limite é independente do caminho concluir-se que $(z) \to 0$ quando $z \to \infty$ com $z \in \text{int}(\Pi^+)$; a conver-

gência uniforme como dissemos atrás. Um resultado análogo é válido para $z \in \text{int}(\Pi^-)$.

Passemos então à proposição IV. Os resultados obtidos em (I), (II) e (III) significam que $\phi^{\pm} \in H^{\pm}$ e que $\phi^{\pm}(z) \to 0$ quando $z \to \infty$ em $\pi^{\pm}$. Então podemos aplicar a fórmula integral de Cauchy a ϕ^+ e ϕ^- obtendo

$$\phi^+(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^+(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad (\text{Im}(z) > 0) \qquad 6.a)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^+(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad (\text{Im}(z) < 0) \qquad (6.b)$$

$$-\phi^-(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^+(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad (\text{Im}(z) > 0) \qquad (6.c)$$

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^-(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad (\text{Im}(z) > 0) \qquad (6.d)$$

De (6.a), (6.c) e (6.b) e (6.d) verifica-se que

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \frac{\phi^+(\lambda) - \phi^-(\lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

Comparando com (3) vemos que

$$F(\lambda) = \phi^+(\lambda) - \phi^-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

atendendo a que ϕ^+ e ϕ^- são contínuas. ■

Passamos agora aos teoremas da factorização. Para tal precisamos das definições seguintes:

Definição 1 (índice). Sendo $G: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função contínua que não se anula e tal que $G(\lambda) \to 1$ quando $|\lambda| \to \infty$ designa-se por índice de G o integral de Stieltjes

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \arg[G(\lambda)]$$

que representaremos por ind(G).

Definição 2 (factorização canónica). Sendo G uma função satisfazendo às condições da definição 1 diz-se que G possui uma factorização canónica se existirem duas funções G^+ e G^- pertendentes a H^+ e H^- que não se anulam em Π^+ e Π^-, respectivamente, e tais que

$$G(\lambda) = G^+(\lambda)\, G^-(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} G^{\pm}(\lambda) = 1, \quad \lambda \in \Pi^+$$

Com estas definições podemos enunciar os dois teoremas da factorização de que vamos precisar

Teorema 2 (factorização, ind (G) = 0). Seja G uma função absolutamente contínua em $\mathbb{R}$, com derivada limitada e tal que, quando $|\lambda| \to \infty$, $G(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-p})$ com $p > 0$. Se G satisfizer ainda às condições

(I) $G(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

(II) $\text{ind}(G) = 0$

então G admite a factorização canónica

$$G(\lambda) = G^+(\lambda)\, G^-(\lambda) \qquad (7)$$

e esta factorização é única.

Teorema 3 (factorização, ind (G) ≠ 0). Seja G uma função satisfazendo às condições do Teorema 3 com (II) substituída por $\text{ind}(G) = \nu \neq 0$. Então G admite um número infinito de factorizações que se podem escrever na forma

$$G(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i\alpha}{\lambda + i\alpha}\right)^{\nu} G^+_o(\lambda)\, G^-_o(\lambda)$$

em que $\alpha > 0$ é arbitrário e G_o^+, G_o^- não se anulam em Π^+ e Π^-, respectivamente.

Demonstração do Teorema 2. Consideremos a função F dada por

$$F(\lambda) = \ln G(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

em que se escolhe o ramo do logaritmo que satisfaz a $F(-\infty) = \ln 1 = 0$.

A função F assim definida é absolutamente contínua em $\mathbb{R}$ visto que G é absolutamente contínua e $G(\lambda) \neq 0$. Tem-se ainda

$$F(+\infty) = \ln|G(+\infty)| + i\arg|G(+\infty)| = 0$$

pois ind(G) = 0 (V: Def. 1). Por outro lado, da desigualdade [1]

$$|\ln \qquad| \leq \frac{|z|}{1 - |z|}, \quad |z| < 1$$

e da condição $G(\lambda) = 1 + O(|\lambda|^{-p})$ resulta que

$$F(\lambda) = O(G(\lambda) - 1) = O(|\lambda|^{-p})$$

quando $|\lambda| \to \infty$. Consequentemente F satisfaz às condições do Teorema 1 e podemos escrever

$$F(\lambda) = F^+(\lambda) - F^-(\lambda)$$

com $F^\pm \in H^\pm$. Pondo

$$G^+(\lambda) = \exp[F^+(\lambda)], \quad G^-(\lambda) = \exp[-F^-(\lambda)]$$

obtemos

$$G(\lambda) = G^+(\lambda)\, G^-(\lambda)$$

que é uma factorização canónica pois $G^+(\lambda)$, $G^-(\lambda)$ não se anulam respectivamente em Π^+ e Π^-.

Vejamos a questão da unicidade da factorização (7). Suponhamos que existe uma outra factorização canónica

$$G(\lambda) = G_1^+(\lambda)\, G_1^-(\lambda) \qquad (G_1^+(\infty) = 1, G_1^-(\infty) = 1)$$

Desta igualdade e de (7) resulta

$$G^+(\lambda) / G_1^+(\lambda) = G_1^-(\lambda) / G^-(\lambda)$$

Recordando que $G_1^+(\lambda) \neq 0$ para $\lambda \in \Pi^+$ e $G^-(\lambda) \neq 0$ para $\lambda \in \Pi^-$ vemos que o 1.º membro desta igualdade é analítico em int (Π^+) e contínuo em Π^+ o mesmo se dizendo do 2.º membro em Π^-; pelos teoremas do prolongamento analítico e de Liouville definem uma mesma função inteira que pela condição no infinito é igual à unidade o que implica

$$G^+ = G_1^+, \; G^- = G_1^-$$

como pretendíamos. ■

Demonstração do Teorema 3. Sendo ν o índice de G a função

$$G_0(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i\alpha}{\lambda + i\alpha}\right)^{-\nu} G(\lambda) \qquad (\alpha > 0)$$

tem índice nulo e satisfaz às condições do teorema 2 como se pode verificar facilmente. Então podemos aplicar a G_0 o teorema 2 e escrever

$$G_0(\lambda) = G_0^+(\lambda)\, G_0^-(\lambda)$$

em que G_0^+, G_0^- não se anulam em Π^+ e Π^-, respectivamente. dado que α é arbitrário concluímos que G admite uma infinidade de factorizações da forma:

$$G(\lambda) = \left(\frac{\lambda - i\alpha}{\lambda + i\alpha}\right)^{\nu} G_0^+(\lambda)\, G_0^-(\lambda). \quad ■$$

2.3. **Resolução do Problema de Wiener-Hopf** — Voltemos então ao Problema 1 começando por considerar o caso em que ind(G) = 0 e F não é identicamente nula (problema não homogéneo). Então recorrendo ao Teorema 2, de (1) obtém-se:

$$\phi^+ / G^+ = \phi^- G^- + F / G^+$$

Tendo em atenção que F / G^+ está nas condições do teorema da decomposição (F / G^+ é derivável em $\mathbb{R}$ e $F / G^+ = O(|\lambda|^{-p})$ quando $(\lambda) \to \infty$) podemos escrever:

$$F / G^+ = S^+ - S^- \tag{8}$$

Consequentemente

$$\phi^+ / G^+ - S^+ = \phi^- G^- - S^-$$

O raciocínio sobre prolongamento analítico que já utilizamos atrás permite-nos concluir que os dois membros da igualdade anterior definem uma função inteira E. Atendendo a que, quando $|\lambda| \to \infty$ $G^+(\lambda)$, $G^-(\lambda) \to 1$ e $\phi^+(\lambda)$, $\phi^-(\lambda)$, $S^+(\lambda)$, $S^-(\lambda) \to 0$ nos semiplanos em que são contínuas, do teorema de Liouville resulta que E = 0 e portanto

$$\phi^+ = S^+ G^+ \tag{9.a}$$
$$\phi^- = S^- / G^- \tag{9.b}$$

Note-se que (9.b) é coerente com a condição de analiticidade imposta a ϕ^- pois $G^-(\lambda)$ não se anula em Π^-

Se F = 0 conclui-se facilmente que $\phi^\pm = 0$. Chegamos assim ao seguinte teorema:

Teorema 4. O Problema 1 com G e F sujeitas às condições definidas no enunciado e ind(G) = 0 tem uma solução única dada pelas fórmulas (9). O problema homogéneo (F = 0) tem apenas a solução trivial $\phi^\pm = 0$.

Vejamos agora a resolução do problema de Wiener-Hopf no caso em que $\nu = \text{ind}(G) \neq 0$ mas finito. Se $\nu > 0$, recorrendo ao teorema 3 e escolhendo $\alpha = 1$, da equação (1) obtemos

$$(\lambda + i)^\nu \phi^+ / G_0^+ = (\lambda - i)^\nu \phi^- G_0^- + (\lambda + i)^\nu F / G_0^+$$

É de notar que $(\lambda + i)^\nu$ é analítica e não se anula em Π^+, o mesmo se dizendo de $(\lambda - i)^\nu$ relativamente a Π^-. Por outro lado o Teorema 1 permite-nos escrever

$$F / G_0^+ = S_0^+ - S_0^-$$

com $S_0^\pm \in H^+$ e $S_0^\pm(\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$. Então

$$(\lambda + i)^{\nu-} (\phi^+ / G_0^+ - S_0^+) = (\lambda - i)^\nu \phi^- G_0^- - S_0^- (\lambda + i)^\nu$$

O raciocínio habitual baseado no teorema do prolongamento analítico permite-nos concluir que os dois membros da igualdade anterior definem uma mesma função inteira E. Tendo em atenção que $\phi^+ / G_o^+, S_o^+$ e $\phi^- / G_o^-, S_o^-$ tendem para zero quando $|\lambda| \to \infty$ em Π^+ e Π^-, respectivamente, do teorema de Liouville resulta que E é um polinómio em λ de grau $\nu - 1$ ($P_{\nu-1}(\lambda)$) e portanto

$$\phi^+(\lambda) = S_o^+(\lambda)\, G_o^+(\lambda) + \frac{P_{\nu-1}(\lambda)\, G_o^+(\lambda)}{(\lambda+i)^\nu}$$

e analogamente para ϕ^-. O problema de Wiener-Hopf (1) com $\nu > 0$ tem, pois, uma infinidade de soluções independentes. Dado que $P_{\nu-1}(\lambda)$ depende de ν coeficientes arbitrários o conjunto das soluções do problema (1) tem dimensão ν. Pode verificar-se que qualquer outra factorização de G conduz ao mesmo conjunto de soluções [9].

Se $\nu < 0$, decompondo o termo independente tal como anteriormente

$$F(\lambda) / G_o^+(\lambda) = S^+(\lambda) - S^-(\lambda)$$

vem

$$\phi^+ / G_o^+ - S^+ = \left(\frac{\lambda - i\alpha}{\lambda + i\alpha}\right)^\nu \phi^- / G_o^- - S^- = E$$

onde E é inteira. Tendo em consideração o comportamento no infinito das funções intervenientes em (12) do teorema de Liouville resulta E =0. Mas como $(\lambda+i)^{-\nu}$ tem um zero de ordem $|\nu|$ no ponto $-i$, para que a função ϕ^- obtida de (12) seja analítica em $\mathrm{int}(\Pi^-)$, S^- deve ter um zero da mesma ordem, naquele ponto o que equivale a dizer que F e G devem satisfazer as condições

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{G_o^+(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda+i)^k} = 0\ ,\ k=1,2\ldots\ |\nu| \qquad (13)$$

Neste caso a solução é única e dada por

$$\phi^+(\lambda) = S^+(\lambda)\, G_o^+(\lambda)$$

Temos, pois, o seguinte teorema:

Teorema 5. O Problema 1 com G e F sujeitas às condições definidas no enunciado tem, se $\mathrm{ind}(G) > 0$, uma infinidade de soluções dadas por (11). Se $\mathrm{ind}(G) > 0$ o problema somente tem solução se F e G satisfizerem às condições (13).

3. A EQUAÇÃO INTEGRAL DE WIENER-HOPF

Neste parágrafo vamos aplicar a teoria do problema de Wiener-Hopf à equação integral

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(t),\ t \in \mathbb{R}^+$$

em que $\mathbb{R}^+ = [0, \infty[$ e f e k são funções que suporemos localmente integráveis (no sentido de Lebesgue e tais que as funções definidas por $tf(t)$ e $tk(t)$ são integráveis em $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{R}$ respectivamente.

Vamos procurar a solução de (15) no espaço $L(\mathbb{R}^+)$ das funções inte ráveis em $\mathbb{R}^+$ (no sentido de Lebesgue). Para podermos aplicar a transformação de Fourier à equação (5) vamos prolongar f, φ para $t < 0$, fazendo

$$\varphi(t) = f(t) = 0,\ t < 0$$

e definir uma função ψ por

$$\psi(t) = 0,\ t > 0$$
$$= -\int_0^\infty k(t-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau,\ t < 0$$

Deste modo a equação (15) pode agora escrever-se

$$\varphi - k * \varphi = f + \psi$$

em que o símbolo * designa a convolução em $\mathbb{R}$. Definiremos a transformada de Fourier de uma função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ por

$$\phi(\lambda) = TF[\phi](\lambda) = \int_0^\infty \phi(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

Recordamos que, se $\phi \in L(\mathbb{R})$, $TF[\phi]$ é contínua em $\mathbb{R}$ e $\phi(\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$; se além disso $t\phi \in L(\mathbb{R})$ então ϕ' existe e é contínua; se $\phi \in L(\mathbb{R})$ e $\phi(t) = 0$ em $]-\infty, 0]$ então $\phi \in H^+$ e $\phi(\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ com $\lambda \in \Pi^+$, se $\phi \in L(\mathbb{R})$ e $\phi(t) = 0$ em $[\ ,\infty[$, $\phi \in H^-$ e $\phi(\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ com $\lambda \in \Pi^-$. Recordamos ainda que se $\varphi_1, \varphi_2, \in L(\mathbb{R})$, $\varphi_1 * \varphi_2$ $L(\mathbb{R})$.

Aplicando a transformação de Fourier à equação (16) obtemos

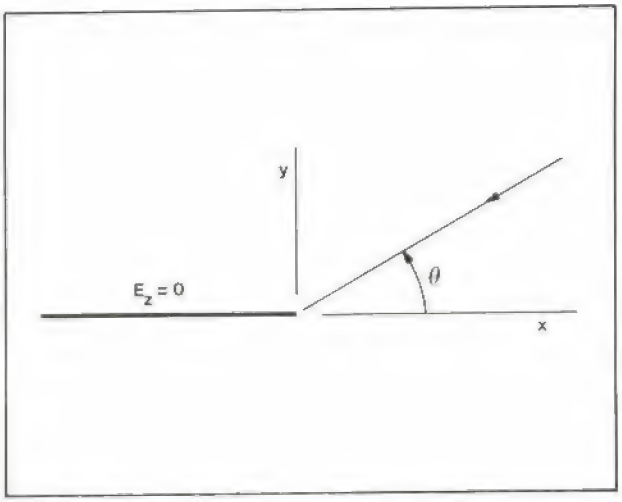
$$(1-K)\,\phi^+ = \psi^- + F^+$$

que define um problema de Wiener-Hopf de coeficiente $(1-K)^{-1}$ e termo independente $(1-K)^{-1}\,F^+$. Concluimos pois que se a equação (15) tiver uma solução $\varphi \in L(\mathbb{R})$ a sua transformada de Fourier é solução do problema de Wiener-Hopf (18).

Admitimos agora que

$$\mathrm{ind}(1-K) = 0$$

FIGURA 1 — Onda incidente sobre um semiplano perfeitamente condutor



Então $(1-K)^{-1}$ satisfaz a todas as condições dos teoremas 2 e 4 (as restantes condições são de verificação imediata) e por conseguinte o problema de Wiener-Hopf (18) tem solução única dada por

$$\phi^+ = G^+ S^+$$

em que

$$(1-K)^{-1} = G^+ G^-$$

$$F^+ G^- = S^+ - S^-$$

Conclui-se, pois, que se a equação integral (15) tiver solução em $L(\mathbb{R}^+)$, esta solução é única e a sua transformada de Fourier é dada por (19). A demonstração da existência da solução consiste em provar que, se f e k satisfizerem às condições enunciadas atrás, $S^+ G^+$ é a transformada de Fourier de uma função de $L(\mathbb{R}^+)$. Contudo esta demonstração envolve conhecimentos não elementares sobre álgebras de Banach que caem fora do âmbito do presente artigo (v. [4] e [9]).

Tendo provado que $TF^{-1}[S^+ G^+] \in L(\mathbb{R}^+)$, andando em sentido inverso ao da análise anterior verifica-se, sem dificuldade, que $\varphi = TF^{-1}[\phi^+]$ é solução da equação (15) ficando assim provada a existência para quaisquer f,k satisfazendo às condições atrás enunciadas.

Chegamos assim ao teorema seguinte.

Teorema 6

Sendo $f \in L(\mathbb{R}^+)$ e $K \in L(\mathbb{R})$ com transformadas de Fourier, absolutamente contínuas e tais que, quando $|\lambda| \to \infty$ $f,k = 0(|\lambda|^{-p})$, $(p > 0)$, se $\mathrm{ind}(1-K) = 0$ a equação (15) tem uma e só uma solução $\varphi \in L(\mathbb{R}^+)$ dada por

$$\varphi = TF^{-1}[G^+ S^+]$$

em que G^+ e S^+ são dados pelas fórmulas (20).

Para terminar este parágrafo vamos fazer referência ao caso $\mathrm{ind}(1-K) \neq 0$. Do teorema 5 obtém-se sem grande dificuldade o resultado enunciado no teorema seguinte.

Teorema 7. Sendo f e k duas funções satisfazendo às condições enunciadas no teorema 6, se $\mathrm{ind}[(1-K)^{-1}] = \nu > 0$ a equação (15) tem ν soluções independentes correspondentes às ν soluções do problema de Wiener-Hopf (18); se $\nu < 0$ e equação (15) não tem, em geral, solução. Neste caso, se f satisfizer às condições adicionais

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{F(\lambda)}{G_0^+(\lambda)} \cdot \frac{d\lambda}{(\lambda+i)^k} = 0, \; k = 1,2,\ldots,|\nu|$$

em que S^+ é dado por (20.b), a equação (15) tem uma solução única (G_0^+ resulta da factorização considerada no teorema 3 com $\alpha = 1$).

4. APLICAÇÃO: DIFRACÇÃO DE UMA ONDA POR UM SEMI-PLANO

Neste parágrafo e no seguinte vamos aplicar a teoria do problema de Wiener-Hopf à resolução de dois problemas clássicos com grande interesse em Engenharia. Trata-se de problemas de fronteira relativos a equações diferenciais parciais de coeficientes constantes e de tipo elíptico. Embora as aplicações que vamos considerar digam ambas respeito à equação de Helmholtz a análise destes problemas tornará evidente que o método seguido é igualmente aplicável a outras equações de coeficientes constantes e até a algumas equações de coeficientes variáveis de tipo particular.

Passemos então ao objectivo deste parágrafo. Vamos estudar o campo difractado por um semiplano perfeitamente condutor sobre o qual incide uma onda plana electromagnética que suporemos polarizada linearmente com um campo eléctrico paralelo à aresta do semiplano (V. Fig. .) (*).

Utilizando o sistema de eixos indicado na Fig. 1 a única componente não nula do campo eléctrico incidente é a componente segundo z o que significa que podemos exprimir o campo electromagnético em termos de um único potencial escalar ϕ (a componente em z do campo eléctrico) de acordo com as fórmulas

$$\underline{E} = \phi \, \underline{a}_z$$

$$\underline{H} = -\frac{1}{i\omega\mu} \nabla \times (\phi \, \underline{a}_z \qquad (21$$

em que $\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial a} a_y$ e μ é a permeabilidade magnética. Excepto sobre o semiplano condutor, ϕ satisfaz à equação de Helmholtz.

* Do ponto de vista matemático o problema que vamos tratar é equivalente ao da difracção de uma onda acústica por um semiplano perfeitamente mole. Para um semiplano perfeitamente rígido a condição de Dirichlet que vamos encontrar é substituída pela condição de Neumann.

$$\nabla^2 \phi + k_o^2 \phi = 0 \qquad (22)$$

em que k_o é o número de onda em espaço livre. Para evitar problemas de convergência da transformação de Fourier que vamos utilizar na resolução do problema proposto, admitiremos que o meio é ligeiramente dissipativo i.e. k_o satisfaz à condição

$$\mathrm{Im}(k_o) < 0 \qquad (23)$$

De acordo com a Fig. 1 o campo eléctrico da onda incidente é dado por

$$E_z^i(x,y) = \exp[ik_o(x\cos\theta + y\sin\theta)] \qquad (24)$$

Com estes dados podemos formular matematicamente o problema proposto do seguinte modo:

Problema 2. Determinar uma função ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(.,y) \in L(\mathbb{R})$ para qualquer y, que satisfaz à equação de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_o^2 \phi = 0$$

em $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_-$ onde Γ_- é a semirecta $y = 0$, $x < 0$ e que satisfaz ainda às condições de fronteira

(I) $\phi(x,0+) = \phi(x,0-)$, $x \in \mathbb{R}$

(II) $\phi(x,0) + E_z^i(x,0) = 0$, $x < 0$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0+) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0-),\ x > 0$$

(III) $\phi(x,y) \to 0$ quando $|y| \to \infty$

(IV) $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0)$ integrável em $]-\infty, 0]$

e à condição na vizinhança da aresta

(V) Existe e é finito $\lim_{x \to 0+} \phi(x,0)$

Observações

a. Veremos adiante que a imposição de uma condição do tipo de (V) é indispensável para garantir a unicidade da solução. A condição (V) está associada à condição de que a energia armazenada na vizinhança da aresta deve ser finita, questão a que faremos referência no final deste parágrafo.

b. A condição de integrabilidade em $\mathbb{R}$ imposta $\phi(.,y)$ bem como a condição (IV) não resultam directamente da física do problema; a sua introdução tem que ver com o método que vamos adoptar para estudar o problema 2. Como veremos adiante, com a formulação anterior, o problema tem solução o que mostra que as condições impostas não são excessivas.

Passemos então à resolução do Problema 2. Pondo $\Phi(y,\lambda) = TF[\phi(.,y)](y,\lambda)$ e aplicando a transformação de Fourier à equação (22), o que é legítimo pelo menos no sentido generalizado, obtemos

$$\frac{d^2 \Phi}{dy^2} + (k_o^2 - \lambda^2)\Phi = 0, \qquad y \neq 0$$

cuja solução é dada por

$$\Phi(y,\lambda) = A(\lambda)\, e^{-ihy},\ y > 0$$
$$= B(\lambda)\, e^{ihy},\ y < 0$$

em que $h = \sqrt{k_o^2 - \lambda^2}$ e se escolheu o ramo da raiz que satisfaz a

$$\mathrm{Im}(h) < 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

de modo a garantir a satisfação da condição no infinito (III). Recorrendo agora à condição de fronteira (I) obtém-se:

$$B(\lambda) = A(\lambda)$$

Para fazer intervir as condições (II) vamos fazer intervir duas funções desconhecidas, pertencentes a $L(\mathbb{R})$, definidas por

$$\psi^+(x) = \phi(x,0), \quad x > 0$$
$$= 0, \quad x < 0$$

$$\psi^-(x) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0+) - \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0-), \quad x < 0$$
$$= 0, \quad x > 0$$

Então de (23) e das relações (III) obtemos:

$$A(\lambda) + \frac{1}{i(\lambda + k_o\cos\theta)} = \psi^+(\lambda)$$

$$-2ihA(\lambda) = \psi^-(\lambda)$$

Eliminando $A(\lambda)$ obtém-se a equação de Wiener-Hopf:

$$\psi^+(\lambda) = \frac{1}{2ih(\lambda)}\psi^-(\lambda) - \frac{i}{\lambda + k_o\cos\theta},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Esta equação não corresponde, contudo, ao problema de Wiener-Hopf tratado no parágrafo 2 dado que

o coeficiente que multiplica $\psi^-(\lambda)$ não tende para uma constante quando $|\lambda| \to \infty$. Podemos, no entanto, reduzir (25) à forma do pf. 2 escrevendo

$$h(\lambda) = h^+(\lambda)\, h^-(\lambda)$$

com

$$h^+(\lambda) = \sqrt{k_0 - \lambda} \qquad h^-(\lambda) = \sqrt{k_0 + \lambda}$$

e introduzindo a mudança de variáveis

$$\psi_1^-(\lambda) = \frac{1}{2i} \cdot \psi^-(\lambda) / h^-(\lambda)$$

$$\psi_1^+(\lambda) = \psi^+(\lambda)\, h^+(\lambda)$$

Então (25) reduz-se ao problema de Wiener-Hopf seguinte

$$\psi_1^+(\lambda) = \psi_1^-(\lambda) - \frac{ih^+(\lambda)}{\lambda + k_0 \cos\theta}$$

cujo coeficiente é igual a 1. Recorrendo ao teorema 1 podemos agora decompor o termo independente na soma de duas funções uma pertencente a H^+ e outra pertencente a H^-. Todavia neste caso a decomposição pode fazer-se sem recurso ao teorema 1 atendendo a que a única singulariadade em Π^+ do termo independente é o polo $-k_0 \cos\theta (\cos\theta > 0)$. Então podemos escrever

$$-\frac{ih^+(\lambda)}{\lambda + k_0 \cos\theta} = S^+(\lambda) - S^-(\lambda)$$

em que

$$S^+(\lambda) = -i\, \frac{h^+(\lambda) - h^+(k_0 \cos\theta)}{\lambda + k_0 \cos\theta}$$

$$S^-(\lambda) = -\frac{ih^+(-k_0 \cos\theta)}{\lambda + k_0 \cos\theta}$$

Substituindo (28) em (27) obtém-se:

$$\psi_1^+(\lambda) - S^+(\lambda) = \psi_1^-(\lambda) - S^-(\lambda) = E(\lambda)$$

em que E é uma função inteira. Vejamos agora qual o comportamento assintótico de $\psi_1^+(\lambda)$ e $\psi_1^-(\lambda)$ quando $\lambda \to \infty$ nos respectivos semiplanos de analiticidade. De (26.a) conclui-se imediatamente que

$$\psi_1^-(\lambda) \to 0 \text{ quando } |\lambda| \to \infty \text{ com } \lambda \in \Pi^-$$

pois sendo ψ^- a transformação de Fourier de uma função pertencente a $L(\mathbb{R}^-)$ tende para zero quando $|\lambda| \to \infty$ no respectivo semiplano de continuidade, Π^-. Quanto a ψ_1^+ notemos que o teorema do valor inicial da transformada de Laplace (unilateral de Fourier no presente caso) e a condição (v) implicam

$$\psi^+(\lambda) \sim a_1 \lambda^{-1}, \ |\lambda| \to \infty \text{ com } \lambda \in \Pi^+$$

em que a_1 é uma constante. Então de (26.b) vem

$$\psi_1^+(\lambda) \sim i a_1 \lambda^{-\frac{1}{2}}, \ |\lambda| \to \infty \text{ com } \lambda \in \Pi^+$$

Consequentemente $\psi_1^+(\lambda)$, $\psi_1^-(\lambda)$ tendem para zero quando $\lambda \to \infty$ respectivamente em Π^+ e Π^-. Tal como vimos em 2 estas condições implicam $E(\lambda) = 0$ e a solução do problema de Wiener-Hopf é única e dada por

$$\psi_1^{\pm}(\lambda) = S^{\pm}(\lambda)$$

Regressando às funções originais temos:

$$\psi^-(\lambda) = 2ih^-(\lambda)\, S^-(\lambda)$$

de que resulta, tendo em atenção (23) e (24.b)

$$\phi(y, \lambda) = \frac{h_\theta}{(\lambda + k_0 \cos\theta)\sqrt{K_0 - \lambda}}\, e^{-iby} \qquad y > 0$$

$$= \frac{h_\theta}{(\lambda + k_0 \cos\theta)\sqrt{K_0 - \lambda}}\, e^{iby}, \qquad y < 0$$

em que $h_\theta = k_0(1 + \cos\theta)$ é independente de λ. Para obter a solução do problema falta somente calcular a transformação inversa de ϕ

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y, \lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda$$

A partir deste integral pode obter-se sem dificuldade uma aproximação assintótica de ϕ válida para $k_0 \sqrt{x^2 + y^2} >> 1$, [2]; pode também deduzir-se uma fórmula exacta em termos de funções de erro.

Observação:

A teoria que acabamos de fazer mostra que a condição (V) é indispensável para garantir a unicidade da solução i.e. para garantir que o problema matemático tem somente a solução que tem sentido físico, situação que é característica dos problemas de difracção por objectos com arestas.

A condição (V) pode, todavia, ser substituída por outra, equivalente, directamente deduzida da condição de que a energia eléctrica armazenada na vizinhança da aresta seja finita. Sendo ρ a distância à

aresta admitimos que $E_z \sim A\,\rho^{\alpha}$; sendo W(r) a energia eléctrica armazenada num cilindro de raio r temos

$$W(r) \sim \frac{1}{2}\,\pi\,\epsilon A^2 \int_0^r \rho^{2\alpha}\,d\rho = \frac{\pi\,\epsilon A^2}{2(2\alpha+1)}\,r^{2\alpha+1}$$

Para que W(r) tenha limite finito quanto $r \to o$ deve ser $2\alpha + 1 > 0$ i.e., $\alpha > -\frac{1}{2}$. A condição (V) poderia, pois, ser substituída pela condição aparentemente menos forte

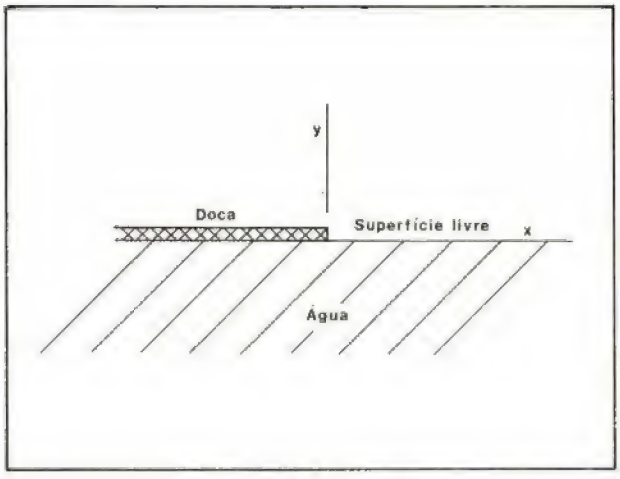
$$y(x,0) \sim Ax^{\alpha} \quad (\alpha > -\frac{1}{2})$$

Com esta condição teríamos $\psi^+(\lambda) \sim A_1\,\lambda^{-\alpha-1}$, $\psi_1^+(\lambda) \sim iA_1\,\lambda^{-\alpha-\frac{1}{2}}$ o que implica que $\psi_1^+(\lambda) \to 0$ quando $|\lambda| \to \infty$ em Π^+ tal como anteriormente. A solução obtida é, pois, a mesma.

5. APLICAÇÃO: ONDAS AQUÁTICAS DE SUPERFÍCIE NA PRESENÇA DE UMA DOCA SEMI-INFINITA

Neste parágrafo vamos abordar o problema da dispersão de ondas aquáticas de superfície pela presença de uma doca semi-infinita num mar infinitamente profundo *. A doca ocupa o semi-eixo $y = 0$, $x < 0$ (Fig. 2) e supõe-se que sobre ela incide uma onda de superfície propagando-se no sentido negativo do eixo dos xx; efectivamente, por razões de natureza matemática que referiremos adiante, iremos considerar que o vector de propagação tem uma componente não nula segundo z o que significa que a onda incide obliquamente relativamente à doca.

* O problema relativo a um mar de profundidade finita trata-se de modo semelhante mas os cálculos são mais complexos (V. [6])



Suporemos que as ondas são de pequena amplitude de modo a podermos utilizar um modelo matemático linear. Sendo $\varphi(r,t)$ o potencial de velocidade tem-se neste caso [14], [15]

$$\nabla^2 \varphi(r,t) = 0 \qquad \text{(na água)}$$

onde $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $r = (x,y,z)$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\ y = 0,\ x < 0 \qquad \text{(doca)}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\,\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0,\ y = 0,\ x > O \qquad \text{(superfície livre)}$$

em que g é a aceleração da gravidade. Suporemos que o sistema doca-mar é excitado por uma onda incidente dada por

$$\varphi_i(\underline{r},t) = \phi_i(x,y)\,e^{ikz}\,e^{i\omega t}$$

o que, dada a linearidade das equações e o facto do sistema ser uniforme em z, implica que $\varphi(r,t)$ é descrita por expressão da mesma forma

$$\varphi(\underline{r},t) = \phi(x,y)\,e^{-ikz}\,e^{i\omega t} \qquad (33)$$

em que ϕ satisfaz à equação de Helmholtz bidimensional:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi = 0 \qquad (34)$$

É precisamente para evitar obter para ϕ a equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$ que admitimos em (32) a dependência exponencial em z que equivale a supor que o vector de propagação tem uma componente não nula em z. A razão de ser da necessidade desta hipótese reside em que pretendemos utilizar a transformação de Fourier para resolver o problema de fronteira associado a ϕ e, em geral, a solução da equação de Laplace em $\mathbb{R}^2$ não possui transformada de Fourier no sentido ordinário devido ao seu comportamento quando $\sqrt{x^2+y^2} \to \infty$. A intuição diz-nos, todavia que a solução do problema deve depender continua-

FIGURA 2 — Doca semi-infinita na superfície de um mar infinitamente profundo

mente de k e portanto, uma vez obtida a função ϕ podemos fazer k tender para zero.

No que respeita à onda incidente falta-nos ainda dar a expressão de ϕ_i em (32). Admitindo, como dissemos no início deste parágrafo que ϕ_i representa uma onda de superfície incidente na doca, deverá ser

$$\phi_i(x,y) = e^{\alpha y} \; e^{i\beta x}, \quad (y < 0) \tag{35}$$

em que $\alpha = \frac{\omega^2}{g}$ e $\beta = \alpha^2 - k^2$ (note-se que ϕ_i satisfaz à equação de Helmholtz (34) e à condição de fronteira na superfície livre). Para evitar certas dificuldades de convergência dos integrais de Fourier faremos ainda a hipótese habitual em problemas relativos à equação de Helmholtz, $-\frac{\Pi}{2} < \arg(k) < 0$ e escolheremos para β A raiz que satisfaz a $-\frac{\Pi}{2} < \arg(\beta) < 0$, o que equivale a supor que a onda incidente se atenua no sentido em que se propaga.

Podemos agora formular em termos precisos o problema matemático a resolver. Seja $\Sigma^- \subset \mathbb{R}^2$ o semiplano $y \leqslant 0$ (Fig. 2).

Problema 3. Determinar uma função ϕ: $\Sigma^- \to \mathbb{C}$ tal que $\phi(.,y) \in L(\mathbb{R})$ para qualquer $y \leqslant 0$ e que satisfaz à equação de Helmholtz

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - k^2 \phi = 0 \tag{36}$$

na região $y < 0$, e às condições de fronteira

(I) $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) + \alpha \phi^+_i(x,0) = 0, \quad x < 0$

$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) = \alpha \phi^+(x,0), \quad x > 0$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$

(II) $\phi(x,y) \to 0$ quando $y \to -\infty$

(III) $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) \in L(\mathbb{R})$

$\phi(x,0) \in L(\mathbb{R})$

Tal como fizemos para o problema do parágrafo anterior vamos aplicar a transformação de Fourier a ambos os membros de (36). Obtemos

$$\frac{d^2 \phi}{dy^2} - \mu^2 \phi = 0$$

em que $\phi(\lambda, y) = TF[\phi](\lambda, y)$ e $\mu^2 = k^2 + \lambda^2$. A solução geral da equação anterior é dada por

$$\phi(\lambda, y) = A(\lambda) e^{\mu y} + B(\lambda) e^{-\mu y}$$

Tendo em atenção a condição (III) e escolhendo o ramo de μ satisfazendo a $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, obtém-se $B(\lambda) = 0$ i.e.

$$\phi(\lambda, y) = A(\lambda) e^{\mu y}$$

Para fazermos intervir as condições de fronteira (I) vamos introduzir as funções desconhecidas $\psi^+, \psi^- \in L(\mathbb{R})$ e definidas por

$$\psi^+(x) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) + \alpha \phi_i(x,0), \qquad x > 0$$

$$= 0, \qquad x < 0$$

$$\psi^-(x) = \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,0) - \alpha \phi(x,0), \qquad x < 0$$

$$= 0, \qquad x > 0$$

Em termos das transformadas de ψ^+ e ψ^- as condições anteriores escrevem-se (usando (37))

$$\mu A(\lambda) + \frac{\alpha}{i(\lambda + \beta)} = \psi^+(\lambda) \tag{38.a}$$

$$(\mu - \alpha) A(\lambda) = \psi^-(\lambda) \tag{38.b}$$

de que se obtém

$$\psi^+(\lambda) = \frac{\mu}{\mu - \alpha} \psi^-(\lambda) - \frac{\alpha i}{\lambda + \beta} \tag{39}$$

que define um problema de Wiener-Hopf para as funções ψ^+ e ψ^-. Atendendo a que $\mathrm{Im}(k) \neq 0$

$$\mu = \sqrt{k^2 + \lambda^2} \neq 0, \alpha, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

O coeficiente do problema de Wiener-Hopf (39) $(1 - \alpha \mu^{-1})^{-1}$ é, pois, uma função contínua e diferente de zero em toda a recta real. Tendo em atenção que $(1 - \alpha \mu^{-1})^{-1}$ é uma função par de λ, vê-se que a variação de $\arg(1 - \alpha \mu^{-1})$ entre $-\infty$ e $+\infty$ é igual a zero e portanto

$$\mathrm{ind}\{(1 - \alpha \mu^{-1})^{-1}\} = 0$$

Então o problema de Wiener-Hopf (39) tem solução única e $(1 - \alpha \mu^{-1})^{-1}$ admite a factorização canónica

$$\frac{1}{1 - \alpha \mu^{-1}} = G^+(\lambda) G^-(\lambda) \tag{40}$$

em que (V. demonstração do Teorema 2)

$$\ln G^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[1 - \frac{\alpha}{k^2 + \lambda_0^2}\right] \frac{d\lambda_0}{\lambda - \lambda_0}, \; (\mathrm{im}(\lambda) > 0) \tag{41}$$

e $G^-(\lambda) = G^+(-\lambda)$ pois μ é uma função par de λ. O integral (41) pode ser calculado exactamente em termos de funções conhecidas, derivando sob o sinal de integral e integrando por partes (V. [9]) o que não faremos para evitar o alongamento excessivo deste parágrafo.

Substituindo (40) em (39) e atendendo a que $\psi^+(\lambda)$, $\psi^-(\lambda) \to 0$ quando $\lambda \to \infty$ em Π^+ e Π^-, respectivamente, das fórmulas (8) e (9) obtemos:

$$\psi^+(\lambda) = S^+(\lambda)\, G^+(\lambda) \tag{42}$$

em que

$$S^+(\lambda) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G^+(\lambda_0)}{\lambda_0+\beta} \cdot \frac{d\lambda_0}{\lambda_0-\lambda} \quad (\mathrm{Im}(\lambda) > 0)$$

$$= \alpha i \, \frac{G^+(\lambda) - G^+(-\beta)}{\lambda+\beta} \tag{43}$$

No cálculo de (43) atendeu-se a que $-\beta \in \mathrm{int}(\Pi^+)$ (V. observções que se seguem à expressão (35). Finalmente de (37), (38.a) e (42) obtém-se a solução do problema,

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\alpha i}{(\lambda+\beta)\,\mu} + \frac{S_+(\lambda)\, G_+(\lambda)}{\mu}\right] e^{\mu y - i\lambda x}\, d\lambda$$

solução que, como vimos atrás é única. Desta expressão podemos obter sem dificuldade uma expressão assintótica para $\phi(x,y)$ recorrendo ao método do caminho de decréscimo máximo. Para valores pequenos de $\sqrt{x^2+y^2}$, $\phi(x,y)$ pode ser calculada por integração numérica ao longo do caminho de decréscimo máximo.

6. AGRADECIMENTO

O autor agradece aos seus colegas Professores J. Campos Ferreira e J. Figanier alguns comentários ao manuscrito que permitiram melhorar o texto original.

7. REFERÊNCIAS

1. M. Abramowitz and I. Stegun "Handbook of mathematical functions", Dover 1965.
2. M.P. Carpentier "Métodos assintóticos — aplicação a problemas de propagação e radiação", trabalho complementar de doutoramento, 1982.
3. S. Chandresakhar "Radiative transfer" Dover, 1960.
4. C. Corduneanu "Integral equations and stability of feedback systems" Academic Press, 1973.
5. F. Gajov "Problemas de contorno" MIR, 1980.
6. T. Greene and A.E. Heins "Water waves over a channel of infinite depth" Quart. Appl. Math. **11**, (1953), 201-214.
7. R. Henery "Solutions of Fredholm equations with symetric difference kernels" J. Inst. Maths. Applics. **19 (1977), 29-37.**
8. **D.S. Jones "A simplifying technique in the solution of a class of diffraction problems" Quart. J. Math. 3** (1952), 189-196.
9. M.G. Krein "Integral equations on a half line with kernel depending upon the difference of the arguments" Amer. Math Soc. Transl. **22** (1962), 163-288.
10. R. Mittra and S. Lee "Analytical techniques in the theory of guided waves" MacMillan, 1971.
11. N. Muskhelishvili "Singular integral equations" Noordhoff, 1977.
12. B. Noble "Methods based on the Wiener-Hopf technique" Pergamon Press, 1958.
13. R. Paley and N. Wiener "Fourier transforms in the complex domain" American Math. Society, 1934.
14. D. Porter "The transmission of surface waves through a gap in a vertical barrier" Proc. Camb. Phil. Soc. **71**, (1972), 411-421.
15. B. Roos "Analytical functions and distributions in Physics and Engineering", Wiley, 1969.
16. J. Sebastião e Silva "Les séries de multipoles des physiciens et la théorie des ultradistributions" Math Annalen **174** (1967), 109-142.

MAGUE

583 AMADO

NOS CENTROS PRODUTORES DE ENERGIA

CENTRAL TERMICA A CARVÃO DE SINES
Grupos de 300 MW.
Elevação do barrilete da caldeira 2

A MAGUE VEM HÁ 20 ANOS CONTRIBUINDO SIGNIFICATIVAMENTE PARA O PARQUE ELECTRO-PRODUTOR NACIONAL

CONSTRUÇÕES METALOMECÂNICAS MAGUE SARL

2616 ALVERCA CODEX — PORTUGAL Tel. 258 2040 Telex 12642

FUNDAMENTOS DO VOO MAGNÉTICO. ANÁLISE DUM MODELO ELEMENTAR

J.F. BORGES DA SILVA (1), Prof. IST

Universidade Técnica de Lisboa Instituto Superior Técnico

RESUMO:

Os princípios físicos do voo magnético são ilustrados pela análise rigorosa de um modelo simples.

ABSTRACT:

The physical principles involved in magnetc flight are illustrated by a rigorous analysis of a simple model.

1. Introdução

Um método que vem sendo investigado com vista à sustentação de veículos rápidos sem contacto consiste no emprego de electro-ímans supercondutores no veículo, originando um campo magnético com componente vertical. O veículo desloca-se paralelamente a uma pista metálica horizontal subjacente, onde vão surgir, por efeito do campo e do movimento, correntes eléctricas induzidas. A interacção magnética destas correntes com as correntes dos electro-ímans dá origem a forças que, tendo carácter repulsivo, asseguram a sustentação do veículo. As forças não são todavia puramente verticais, dando também origem a uma resistência que se opõe ao movimento horizontal. A designação *voo magnético* deriva duma certa analogia com o comportamento aerodinâmico duma asa de avião.

A análise do problema para obtenção de resultados quantitativos, usando configurações com o grau de complexidade exigido nas aplicações, é possível pelo recurso ao cálculo numérico em computador digital (**2**). Como é óbvio este tipo de análise não proporciona uma fácil compreensão da natureza do fenómeno, sendo preferível para este efeito formular modelos simplificados cuja solução rigorosa possa obter-se por meios analíticos, se possível elementares, de modo a permitir pôr em evidência o essencial. O presente trabalho pretende dar uma contribuição nesse sentido.

2. Formulação do modelo

Como fonte primária do campo magnético, considera-se um filamento de corrente de intensidade I paralelo à pista, colocado à altura h acima desta e normal à direcção da velocidade **v**, Fig. 1.

Admite-se o filamento indefinido segundo a direcção do eixo-z, de modo a reduzir a análise ao plano x-o-y. A pista é representada por uma folha condutora no plano x-o-z caracterizada pela sua condutividade σ, permeabilidade magnética μ_0 igual à do meio ambiente e espessura a suficientemente pequena para se poder tomar a densidade de corrente uniforme na espessura da folha.

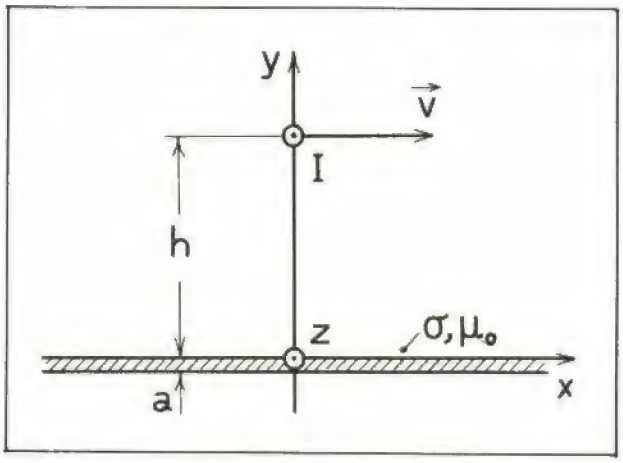


FIGURA 1 — Geometria do modelo para estudo do voo magnético.

3. Equações do campo magnético

À excepção das regiões onde se encontram as fontes, filamento e pista, o campo deve satisfazer localmente às equações,

$$\text{a) } rot\,\mathbf{H} = 0 \quad \text{b) } div\,\mathbf{B} = 0 \quad \text{c) } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \qquad (1)$$

Em consequência, campos assentes no plano x-o-y e apenas dependentes de x e y terão de satisfazer simplesmente a,

$$\text{a) } \frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \qquad \text{b) } \frac{\partial H_x}{\partial x} = -\frac{\partial H_y}{\partial y} \qquad (2)$$

A singularidade representada pelo filamento primário implica ser,

$$\oint_s \mathbf{H} \cdot \mathbf{ds} = I$$

para qualquer contorno s fechado em torno do filamento. Por outro lado, a existência de correntes na

---

(1) O Autor é investigador do Centro de Electrotecnia da U.T.L. subsidiado pelo I.N.I.C.

(2) A título de exemplo, veja-se a referência [1].

Original recebido para publicação em 6/1/81

FIGURA 3 — Campo magnético duma dupla camada de correntes semi-infinita com a aresta na origem do plano.

pista, segundo a direcção z, implica descontinuidade da componente x de **H**, tangencial à pista,

$$H_x(x, 0+) - H_x(x, 0-) = -j_z(x) \qquad (3)$$

onde $j_z(x)$ representa a intensidade de corrente segundo z, por unidade de comprimento segundo x.

4. Campo eléctrico e correntes induzidas

Seja **B** o campo de indução magnética observado no referencial do filamento. No referencial da pista em movimento relativo de velocidade $-\mathbf{v}$ observar-se-à, além de **B**, um campo eléctrico que, para velocidades pequenas em relação à da luz no vazio, é dado por,

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad \text{ou} \quad E_z = -vB_y \qquad (4)$$

no caso do problema. Na pista condutora aparece por efeito deste campo eléctrico um campo de correntes,

$$j_z(x) = \sigma\, a\, E_z = -\sigma\, a\, v\, B_y(x,0) \qquad (5)$$

5. Construção do campo magnético

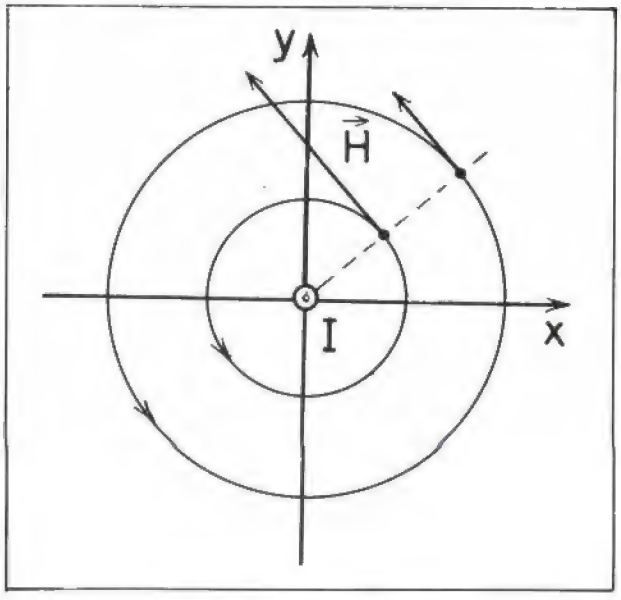
Considere-se o par de funções,

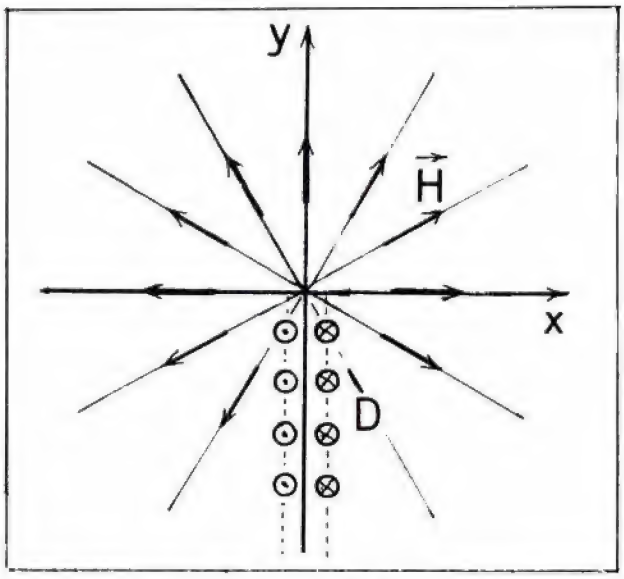
$$\text{a)}\ f(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2} \quad \text{b)}\ g(x,y) = \frac{-1}{2\pi}\frac{y}{x^2+y^2} \qquad (6)$$

com o qual se estabelecem duas distribuições básicas de campo, satisfazendo as condições (2):

A) O campo dum filamento de corrente I, Fig. 2.

$$\mathbf{H}_I(x,y) = I(-g\mathbf{u}_x + f\mathbf{u}_y)$$





B) O campo duma dupla camada de correntes semi-infinita de intensidade D, Fig. 3.

$$\mathbf{H}_D(x,y) = D(f\mathbf{u}_x + g\mathbf{u}_y) \qquad (8)$$

O campo total será construído pela sobreposição de duas parcelas. Uma parcela associada ao filamento de corrente primário localizado em $(0,h)$ e do tipo A),

$$\mathbf{H}_0(x,y) = \mathbf{H}_I(x, y-h) \qquad (9)$$

e outra parcela relativa ao campo associado às correntes da pista. Este último será obviamente simétrico em relação ao plano da pista e apresentará descontinuidade da componente tangencial ao atravessá-la. Será por isso representado por duas expressões distintas, construídas pela sobreposição de campos dos tipos A) e B).

O campo H_1 com singularidade localizadas na posição imagem do filamento primário $(0, -h)$ e válido para,

$$y > 0: \qquad (10)$$

$$\mathbf{H}_1(x,y) = \mathbf{H}_{I'}(x, y+h) + \mathbf{H}_{D'}(x, y+h)$$

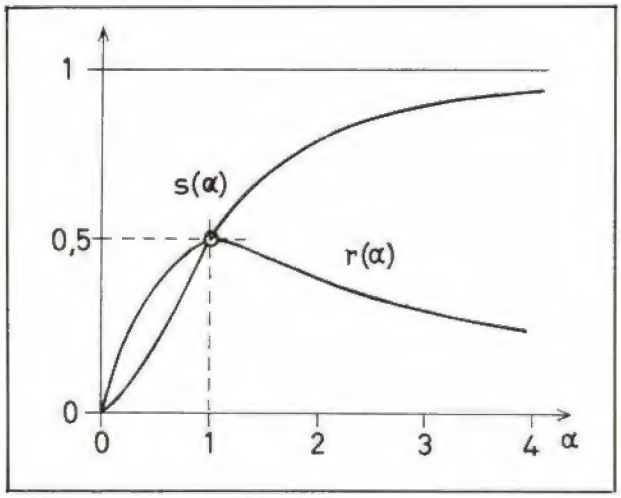
e o campo H_2 com singularidades reflectidas no plano x-o-z, localizadas na posição do filamento primário $(0,h)$ e válido para,

$$y < 0: \qquad (11)$$

$$\mathbf{H}_2(x,y) = \mathbf{H}_{I'}(x, y-h) - \mathbf{H}_{D'}(x, y-h)$$

FIGURA 2 — Campo magnético dum filamento de corrente na origem do plano.

FIGURA 5 — Funções características da sustentação s (α) e da resistência r (α), na sua dependência da velocidade.



Ver Fig. 4. Em termos destes campos, a descontinuidade de H_x definida em (3) será dada por,

$$H_{1x}(x,0+) - H_{2x}(x,0-) = 2\,H_{1x}(x,0) \qquad (12)$$

O tratamento deste tipo de problemas fazendo uso de imagens, deriva do método do *rasto de imagens* empregado por Maxwell no seu Tratado, [**2**].

6. Determinação da intensidade das imagens

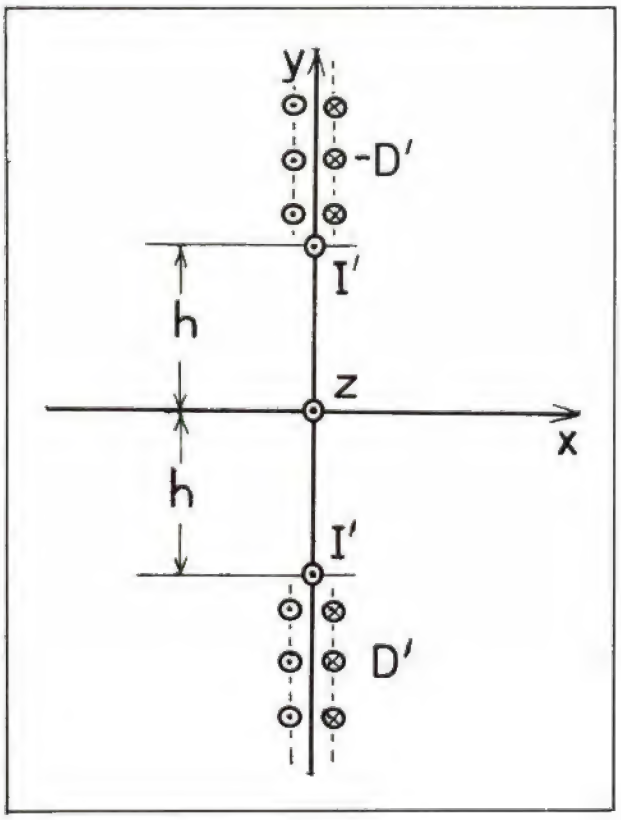
A componente normal do campo magnético determina as correntes induzidas na pista (5). Por outro lado, as correntes induzidas determinam a descontinuidade da componente tangencial do campo (3). Daí ter de se verificar,

$$H_{1x}(x,0+) - H_{2x}(x,0-) = \mu_0\,\sigma\,a\,v\,H_y(x,0) \qquad (13)$$

onde a componente normal $H_y(x,0)$ se refere ao campo total sobre a pista, devido às correntes do filamento primário e da própria pista. De (7,8,9,10,12,13) obtém-se a condição a satisfazer pelos campos na vizinhança da pista,

$$-I'\,g(x,h) + D'\,f(x,h) = \alpha\,[\,I\,f(x,-h) + I'\,f(x,h) + D'\,g(x,h)\,] \qquad (14)$$

sendo para o efeito conveniente definir a velocidade crítica da pista v_c e o parâmetro adimensional característico da velocidade α.



$$v_c = 2\,(\mu_0\,\sigma\,a)^{-1}$$

$$\alpha = v\,/\,v_c \qquad (15)$$

Atendendo a que f *(x,y)* de 6.a) é par em *y*, a expressão (14) converte-se numa identidade desde que I' e D' tomem os valores,

$$I' = -\frac{\alpha^2}{1+\alpha}\,I \qquad D' = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}\,I \qquad (16)$$

Deste modo, a dependência da velocidade que caracteriza o fenómeno opera-se unicamente através das funções,

$$s(\alpha) = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2} \quad \text{e} \quad r(\alpha) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \qquad (17)$$

representadas na Fig. 5.

7. Determinação da força

A força por unidade de comprimento do filamento primário devida às correntes da pista exprime-se, em termos do campo $\mathbf{B}_l$ oriundo destas correntes, por

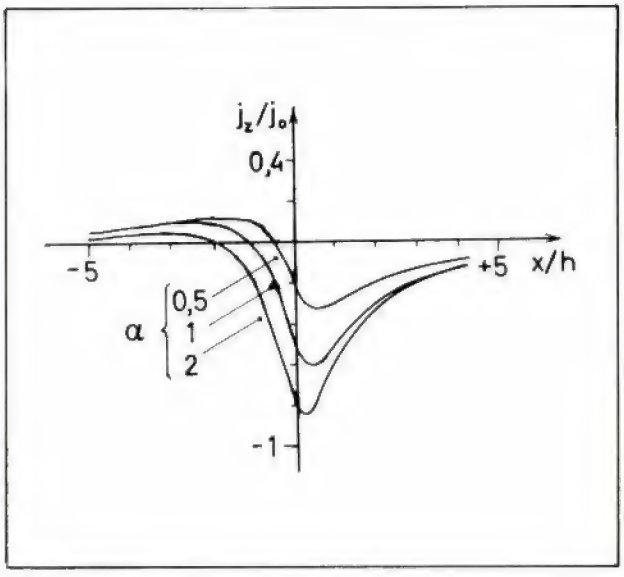
$$\mathbf{F} = I\,\mathbf{u}_z \times \mathbf{B}_l(0,h)$$

Atendendo a (6,7,8,10,16,17) obtém-se imediatamente

$$\mathbf{F} = F_m\,[\,-r(\alpha)\,\mathbf{u}_x + s(\alpha)\,\mathbf{u}_y\,] \qquad (18)$$

FIGURA 4 — Fontes virtuais do campo magnético das correntes da pista.

FIGURA 7 — Distribuição da densidade de corrente na pista a diferentes velocidades. Valor de referência, $j_0 = I / \pi h$.



A componente x representa a resistência ao movimento e depende unicamente da componente vertical do campo. Tem como fonte virtual a parte em dupla camada da imagem localizada em *(0, —h)*. A componente y representa a sustentação e depende unicamente da componente horizontal do campo. Tem como fonte virtual o filamento da mesma imagem. Na sua dependência da velocidade através de α, estas forças comportam-se respectivamente como as funções r (α) e s (α) da Fig. 5. Este resultado pode traduzir-se pelo diagrama polar da Fig. 6 que é uma circunferência cujo diâmetro

$$F_m = \mu_0 I^2 / (4 \pi h) \qquad (19)$$

representa o valor máximo da força repulsiva. A correspondência com os valores de α pode obter-se a partir duma recta graduada linearmente em α como se indica na figura.

8. Discussão dos resultados

As expressões (17,18) conduzem à relação fundamental $F_r = F_s / \alpha$ entre as forças de resistência F_r e de sustentação F_s, pelo que $1 / \alpha$ se pode encarar como um coeficiente de atrito característico do processo, que é decrescente com a velocidade. Se se atender a que a potência $P_t = vF_r$ se pode escrever, em consequência da mesma relação, como $P_t = v_c F_s$, observa-se que esta potência é independente da velocidade a que se faz o transporte e que consequentemente o custo energético do transporte é inverso da velocidade. Estes factos apontam a vantagem de utilizar uma pista de velocidade crítica baixa e de operar a velocidades muito superiores à crítica. Por outro lado, sendo a intensidade do campo primário certamente limitada superiormente por razões de natureza técnica, as condições a alta velocidade permitem realizar a força de sustentação máxima, Fig. 6, que é proporcional a I^2 (19). Esta última expressão mostra também que a força é inversa da altura h que terá assim também o seu limite superior tecnicamente viável. A dependência com o inverso de h mostra ainda que as forças de sustentação se comportarão como uma mola não-linear que endurece à medida que o veículo se aproxima da pista.

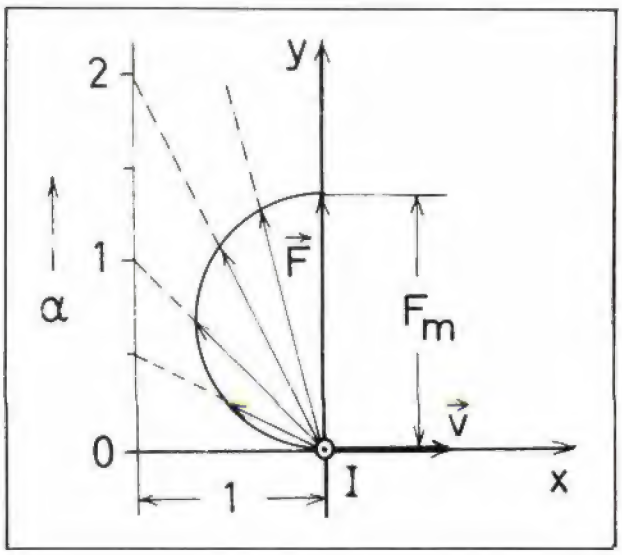


FIGURA 6 — Diagrama polar da força em função da velocidade.

9. Correntes induzidas na pista

No referencial do veículo as correntes da pista são estacionárias, no referencial da pista representam uma onda que acompanha o veículo no seu movimento segundo x. A forma da onda pode obter-se de (3) usando (7,8,10,12,16) de que resulta,

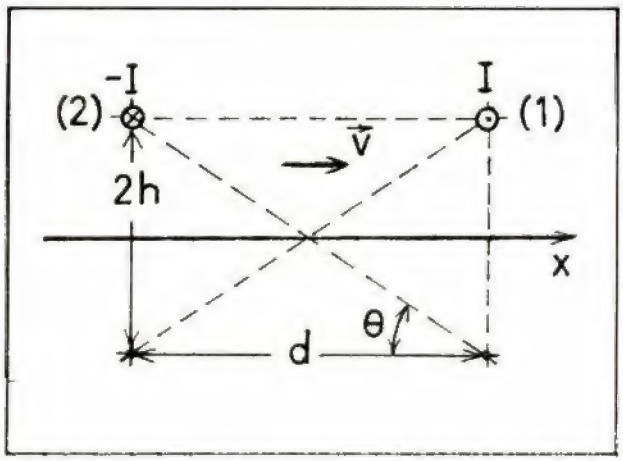
$$j_z(x)_\alpha = -2I\,[s(\alpha)\,g(x,h) + r(\alpha)\,f(x,h)] \qquad (20)$$

Na Fig. 7 representam-se algumas curvas da família de parâmetro α descritivo da velocidade. A primeira parcela do segundo membro de (20) é par em x e é responsável pela sustentação, predominando a alta velocidade. A segunda parcela é ímpar em x e de tal modo que a arcada em avanço sobre o veículo é repulsiva e a arcada em atrazo atractiva. Daqui resulta contribuir apenas para a força horizontal com o carácter duma resistência ao movimento.

Esta parcela predomina a baixa velocidade.

No limite da alta velocidade as correntes da pista dão um campo na região superior que corresponde só

FIGURA 9 — Geometria do modelo para simulação de uma espira.



ao filamento imagem de sentido oposto ao da corrente primária, que no limite terá uma intensidade igual. A força é então, como se viu, puramente vertical e repulsiva atingindo o seu valor máximo.

Efectivamente, a alta velocidade a pista comporta-se como um *espelho* magnético perfeito, cancelando o campo primário na região inferior e reflectindo-o totalmente para a região superior. Na Fig. 8 mostra-se a forma do campo magnético total para um caso intermédio $\alpha = 2$.

10. Exemplo numérico

Para uma pista de alumínio com $\sigma = 35{,}4 \times 10^6\ \mathrm{Sm}^{-1}$ e de 2,5 cm de espessura, tem-se para velocidade crítica (15) $v_c = 1{,}8\ \mathrm{ms}^{-1} = 6{,}47$ Km/h. A potência de tracção por tonelada de sustentação será então de 16,7 KW/tonelada. Para obter um coeficiente de atrito não excedendo 2%, deve ser $\alpha > 50$, isto é, a velocidade deve ser pelo menos de 324 Km/h. Nestas condições a força terá praticamente o seu valor máximo e será essencialmente sustentação. Para obter a sustentação de 1 ton/m à altura de 20 cm acima da pista, será necessária uma corrente primária (19) I = 136 KA. Nestas condições a intensidade do campo primário sobre a pista directamente sob o filamento atingirá $B_0 = 0{,}136$ T e o campo total será duplo deste. Na pista e no mesmo ponto a densidade de corrente atinge o seu valor máximo 8,64 A mm^{-2}.

11. Sistemas com mais de um condutor primário

As equações que governam os campos sendo lineares permitem obter o campo dum sistema de condutores por simples sobreposição dos campos associados a cada condutor considerados isoladamente. As forças porém deverão ser calculadas para cada condutor pela interacção da respectiva corrente com o campo resultante das imagens de *todos* os condutores e só depois somadas para todos os condutores afim de obter a força resultante. Deste modo a análise elementar relativa a um condutor isolado pode ser estendida a casos mais próximos da realidade prática sem qualquer dificuldade. Na Fig. 9 considera-se o caso de dois condutores com correntes iguais e de sentidos contrários simulando dois lados de uma espira. O essencial do resultado para esta configuração consiste em verificar-se que a força resultante vem simplesmente reduzida de um factor geométrico independente da velocidade, sendo

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 2\mathbf{F}\ \cos^2\theta$$

onde **F** representa a força que se observaria para cada um dos condutores isoladamente (18). A redução é efectivamente condicionada pela proximidade relativa dos dois condutores expressa através do ângulo θ da Fig. 9. As forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ *não são porém iguais.* Os diagramas polares respectivos encontram-se rodados em sentidos opostos do ângulo θ, Fig. 10, e os seus diâmetros vêm reduzidos pelo factor $\cos\theta$. Verifica-se assim, Fig. 10, que a força de sustentação é maior no condutor da rectaguarda do que no da frente, tendendo para a igualdade a alta velocidade.

12. Conclusões

O modelo constituído por um filamento de corrente deslocando-se paralelamente a uma folha condutora é susceptível de análise simples e exacta usando um método de imagens. Torna-se assim possível obter uma visão elucidativa dos processos físicos envolvidos no voo magnético bem como determinar, em ordem de grandeza, algumas das propriedades que o caracterizam relevantes para a sua aplicação. O caso

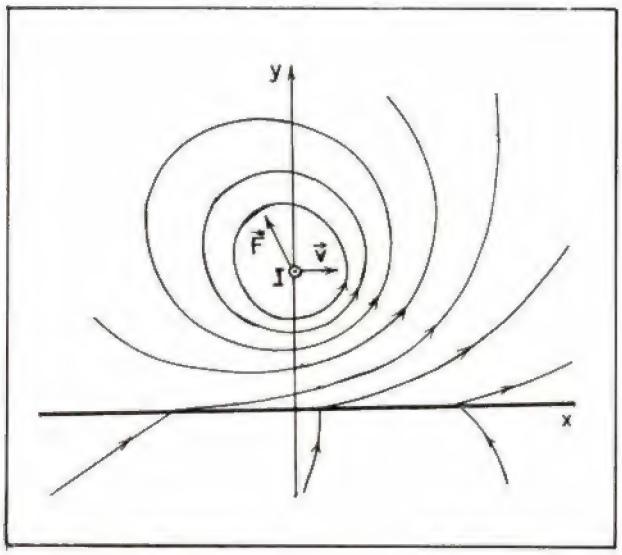


FIGURA 8 — Linhas do campo magnético total para uma velocidade dupla da crítica ($\alpha = 2$).

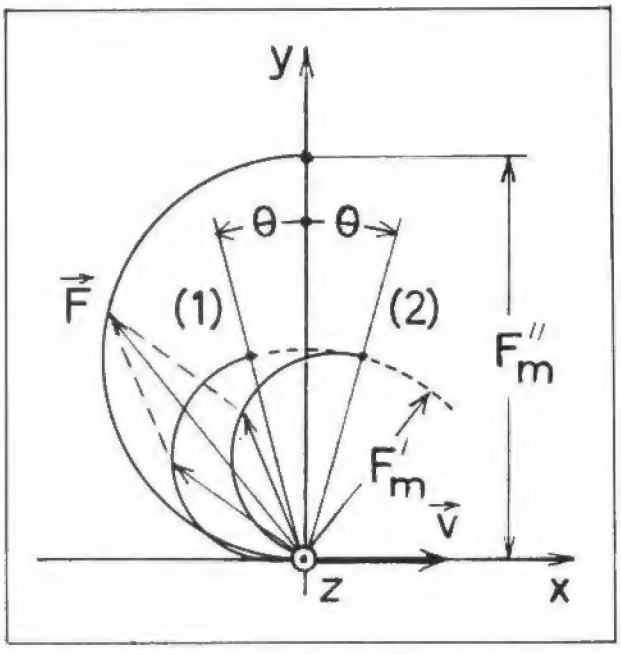


FIGURA 10 — Diagramas polares das forças de cada um dos condutores da Fig. 9 e da sua resultante. Força máx. por condutor $F'_m = F_m \cos\theta$. Força máx. resultante $F''_m = 2 F_m \cos^2\theta$.

elementar de um único condutor pode ainda servir de base à análise de configurações mais complexas e embora fora do alcance do presente trabalho, não se quer deixar de salientar a estreita relação que existe entre este problema e os aproblemas do freio electrodinâmico e da máquina assíncrona linear, para a compreensão dos quais este tipo de análise poderá igualmente contribuir.

13. Bibliografia

[1] **A. Lang, H Weh, H. May,** *Electrodynamisches Tragsystem mit endlich breiter Schiene,* Arch. f. Elektrotech., vol. 57 pgs. 223, 233 (1975).

[2] **J.C. Maxwell,** *A Treatise on Electricity and Magnetism* 3rd. ed., vol. 2, Chap. XII, Oxford University Press 1892. Reprint by Lowe & Brydone, London 1955.

A escolha da classe de intensidade dos pára-raios para os postos de transformação alimentados por linhas aéreas a média tensão (*).

DOMINGOS MOURA Prof. Cat. do I.S.T.

RESUMO

Valores adequados da resistência de terra dos últimos apoios da linha aérea, adjacentes aos pára-raios, e a cobertura dos últimos vãos com cabos de guarda permitem garantir que a crista da onda de tensão que chega aos pára-raios não excede o nível de isolamento da linha. Verifica-se que isto acontece mesmo numa situação particularmente desfavorável que se quantifica. Nestas condições pode esperar-se que o nível de protecção nominal assegurado por pára-raios da classe 5 kA não seja ultrapassado.

SUMMARY

Even in a very unfavourable situation, it is shown that voltage surges reaching the arresters do not exceed the insulation level of the line if the ground resistence of the last poles adjacents to the arresters is adequate and the last spans are covered with ground wires. Under these conditions, it is expected that the protection level guaranted by classe 5 kA arresters will not be exceeded.

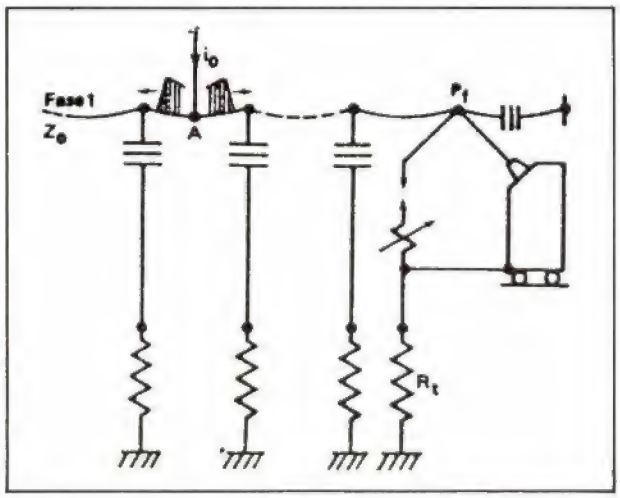
A tensão entre os terminais de um pára-raios depende da intensidade da corrente que o atravessa. Por isso o nível de isolamento é garantido para uma intensidade nominal a que corresponde a chamada "classe de intensidade". A classe de intensidade deve, portanto, ser escolhida tendo em conta a intensidade que pode percorrer o pára-raios. A concretização deste critério de escolha, que é óbvio, tem sido dificultada pelo conhecimento, ainda deficiente, da descarga atmosférica e da interacção entre esta e os sistemas de energia eléctrica. No decénio que decorreu entre 1970 e 1980 foram conseguidos aperfeiçoamentos importantes no modelo "descarga atmosférica — sistema de energia"; esses aperfeiçoamentos permitem justificar, melhor do que anteriormente, algumas das escolhas dos projectistas.

Estas notas procuram fundamentar práticas seguidas na escolha da classe de intensidades dos pára-raios usados em instalações de média tensão (6 a 60 kV nominais); todavia não omitem a grande incerteza que ainda acompanha o que se vai conhecendo sobre a interacção entre as descargas atmosféricas e as redes de energia eléctrica.

****

A figura 1 representa uma linha aérea trifásica, sem cabo de guarda, sobre a qual incide, no ponto A, uma descarga atmosférica directa. Os apoios são metálicos; entretanto quase tudo o que adiante se expõe é aplicável a linhas com apoios em madeira desde que equipados com travessas metálicas ligadas à terra.

FIGURA 1 — Descarga atmosférica sobre uma linha sem cabo de guarda



A descarga atmosférica (figura 1) é definida pelos valores da função $i_0(t)$, isto é pela evolução no tempo da intensidade da corrente no ponto de impacte, A; os valores da tensão das ondas que se propagam para a esquerda e para a direita de A são dados por $i_0 Z_0/2$, em que Z_0 é a impedância de choque do condutor atingido. Como é habitual, e por razões bem conhecidas [1], trata-se Z_0 como uma quantidade real.

O modelo que a figura 1 representa, embora muito divulgado, merece comentários que se expõem a seguir.

****

Os valores, que se conhecem, das intensidades das descargas, e dos quais tem sido exaustivamente feito (e refeito) o tratamento estatístico, são intensidades totais medidas no condutor que liga o canal do raio à

(*) — *Estas notas inserem-se nas actividades da Linha de Acção 5 (Redes Eléctricas de Distribuição e Utilização em Média Tensão) do Centro de Electrotecnia das Universidades de Lisboa. Foram entregues para publicação em Fevereiro de 1981.*

terra. O ponto de impacte é, assim, um ponto de transição onde confluem ondas incidentes e reflectidas suportadas pelo canal do raio e ondas guiadas pelos condutores que convergem no ponto de impacte. Todavia merece reserva a identificação do canal do raio com um condutor ao qual se aplicariam os modelos da propagação e da condução usados para condutores ohmicos, filiformes.

As observações feitas até hoje permitem afirmar que as estruturas, relativamente baixas, das linhas de média tensão são atingidas apenas por descargas negativas (descargas tipo 1b, segundo a classificação de BERGER [2]) as quais resultam da junção de uma descarga-guia descendente que partiu da zona inferior da nuvem carregada negativamente, com uma descarga ascendente que parte do terreno carregado positivamente. Os fenómenos que condicionam o percurso sinuoso da descarga inicial descendente são mal conhecidos; no canal de descarga que desce da nuvem parece poder distinguir-se um núcleo central muito fino envolvido por cargas de espaço que preenchem um volume com vários metros de diâmetro [3]; a progressão faz-se por "saltos" e no fim de cada salto há uma paragem para a qual têm sido sugeridas explicações diversas; o último desses saltos (que define o ponto de impacte da descarga) parece dar-se em sentido inverso dos anteriores, graças a uma descarga vinda da terra sobre a qual, aliás, pouco se sabe; as intensidades muito elevadas que se medem nas estações de observação correspondem à luminosa descarga de retorno que progride da terra para a nuvem com uma velocidade de cerca de 15% da velocidade da luz no vazio; muitas críticas têm sido feitas à precisão, e até ao significado, das medidas das intensidades das descargas [2], [4]; é o velho problema de saber o que se mede.

De tudo isto em que, em primeiro lugar, importa distinguir as propagações, da edificação do condutor que as suporta, não se pode concluir que o canal do raio possa ser tratado como um condutor filiforme, ohmico, homogéneo e estável. É certo que é conhecida a intensidade total no ponto de impacte a qual resulta de ondas incidentes e reflectidas; mas isto não chega para suportar os tratamentos convencionais dos pontos de transição. Por exemplo, faltam informações para se poder discutir com segurança a eventual influência das condições terminais sobre a intensidade total da descarga.

Enquanto o conhecimento sobre a descarga atmosférica não avançar, a opção menos má parece ser tratar a descarga atmosférica como uma fonte de corrente e tratar os valores estatísticos das descargas como se fossem independentes do ponto de impacte designadamente da resistividade do terreno.

Um primeiro comentário ao modelo representado na figura 1 consiste, pois, em esclarecer que o ponto de impacte, A, se liga a uma fonte de corrente ideal.

****

Como já se referiu, constatou-se que as linhas aéreas de média tensão são atingidas, apenas, por descargas negativas. Para prever as situações mais desfavoráveis devem ser usadas, portanto, estatísticas que incluam, apenas, as descargas negativas.

As intensidades de crista extremamente elevadas estão invariavelmente ligadas às descargas positivas (apenas 5% das descargas negativas ultrapassam 80 kA enquanto 5% das descargas positivas ultrapassam 250 kA); as durações das frentes das descargas negativas são, estatisticamente, menores do que as durações das frentes das descargas positivas [5].

Um segundo comentário à figura 1 esclarece, portanto, que a intensidade máxima, i_{mx}, não ultrapassará os valores que, já com pequena probabilidade, se verificam nas descargas negativas.

****

Depois da tensão do condutor, em relação à terra, ultrapassar a tensão de serviço inicia-se o efeito coroa (a tensão mais ou menos elevada conforme a geometria e o estado da superfície do condutor). O efeito coroa pode afectar muito os fenómenos de que nos estamos a ocupar: causa atenuação, distorsão e redução do valor da impedância de choque Z_0. Segundo alguns investigadores, esta última parece poder baixas dos valores habituais de algumas centenas de ohms (condutor filiforme, metálico) para cerca de 100 ohms.

Os suportes teóricos para a quantificação das consequências do efeito coroa são ainda muito precários. A previsão das atenuações pode ser feita recorrendo à conhecida fórmula empírica de FOUST e MENGER que conduz a resultados confirmados pela experiência com aproximação razoável [1]. Mas quanto à redução de Z_0 há, apenas, um vago conhecimento experimental.

Um terceiro comentário esclarece, assim, que o valor de Z_0 é conhecido com grande imprecisão.

****

No domínio dos fenómenos que, simplificando, se podem globalmente designar por "efeito coroa" incluem-se as correntes de pré-descarga; estas podem contribuir muito para reduzir a tensão de choque aplicada a um equipamento (transformador, cadeia de isoladores, por exemplo), como já em 1961 foi assinalado por WAGNER [3], [6].

Se uma onda de choque com o valor u_i atinge um ponto de um condutor linear homogéneo, onde, por

meios adequados [6] se provoca uma intensidade de pré-descarga i, a tensão u, nesse ponto, devida à onda u_i é, como é sabido,

$$u = u_i - Z_o\, i/2 \qquad (1)$$

Esta redução de u, em relação à tensão u_i, devida à "queda de tensão de choque" $Z_o\, i/2$, pode atrazar muito o crescimento da tensão no ponto considerado e reduz a tensão máxima que nele se atinge.

Como curiosidade nota-se que a equação 1 pode traduzir, de uma maneira muito simples, uma interpretação do efeito dos pára-raios, a qual salienta a influência da impedância de choque do condutor, Z_o.

Um quarto comentário chama a atenção para o facto de o modelo que a figura 1 representa não incluir eventuais correntes de pré-descarga.

****

Já foi recordado que um dos resultados das investigações sobre a interacção "descarga atmosférica — sistema de energia eléctrica" foi o constatar-se que só a curta distância do ponto de impacte (a dezenas ou a uma ou duas centenas de metros) este é escolhido. Parece estar razoavelmente verificado que a extensão, d, do "salto final" está ligada com o valor de crista i_{mx} da intensidade de descarga no ponto de impacte; diversas leis de ligação têm sido propostas, a maioria das quais do tipo $d = k.\ i_{mx}^{\gamma}$.

De acordo com expressões geralmente aceites, se $i_{mx} \approx 30$ kA a escolha do ponto de impacte é feita a cerca de 100 m deste; se $i_{mx} \approx 80$ kA a escolha faz-se a cerca de 200 m. Sendo curtos (100 m a 200 m) os vãos característicos das linhas de média tensão, as descargas de mais alta intensidade dirigem-se quase exclusivamente para os apoios. Isto porque os apoios não são pontos de uma distribuição homogénea, antes são pontos que sobressaem apreciavelmente acima da altura média dos condutores, exibindo notáveis singularidades e grandes concentrações das linhas do campo eléctrico.

Um quinto comentário consiste, por isso, em notar que, nas linhas aéreas de média tensão, as descargas de origem atmosférica, muito provavelmente, incidem sobre os apoios, na quase totalidade.

****

O estudo da descarga sobre um apoio metálico exige modelo algo diferente do que se representou na figura 1; a maior ou menor complexidade do novo modelo depende, como sempre acontece, do que se procura conhecer.

Quando uma descarga atmosférica atinge um apoio metálico este é percorrido por ondas de intensidade e de tensão que se continuam pelos electrodos de terra; as ondas de tensão ao atingirem a extremidade dos electrodos originam ondas com o mesmo sinal que regressam ao ponto de impacte. Dos electrodos de terra partem, transversalmente, ondas para o terreno, o que tem como consequência a emissão de ondas reflectidas, com sinal contrário, que também regressam ao ponto de impacte. Ao fim de um tempo curto (em geral poucos décimos de microssegundo) já tudo se passa como se ao topo do apoio estivesse ligada uma resistência pontual com um valor ohmico próximo do que se obtém medindo a resistência de terra usando uma fonte de tensão contínua.

Um modelo mais perfeito terá de distinguir as características electromagnéticas do apoio e dos electrodos de terra [9]; terá de contar com a presença de cargas eléctricas, não uniformemente distribuídas, ao longo do canal do raio [10]; terá de representar certas peculiaridades do comportamento dos terrenos sob ondas de choque [11]. O refinamento do modelo tornou-se indispensável quando se pretendeu prever o número anual de contornamentos das cadeias das linhas aéreas a 345 kV ou a tensões nominais superiores (ver, por exemplo, o artigo de LIEN e DARVENIZA em 1971 [12]). Todavia para estimar as intensidades das correntes através dos pára-raios, em média tensão, afigura-se bastar um modelo menos sofisticado.

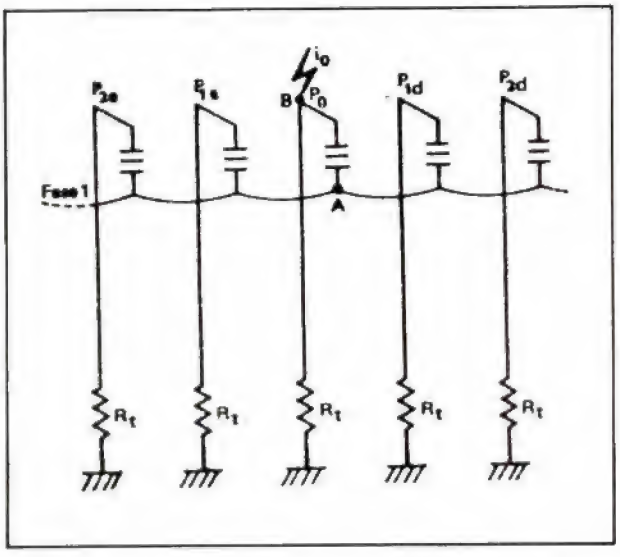
Em tudo o que se segue admitimos que o contornamento das cadeias se dá durante o crescimento, em rampa, da frente da onda incidente. As tensões de contornamento devido a frentes em rampa têm sido medidas em muitos ensaios e podem considerar-se bem conhecidas experimentalmente. Contudo podem ocorrer contornamentos nas caudas de ondas com forma análoga à que é emitida para além dos apoios P_{2d} e P_{2e} no exemplo que, a seguir, se expõe. Nestes casos a situação está menos bem estudada.

Como fica claro da exposição que segue, esses contornamentos, em circunstâncias excepcionais, não alteram as conclusões genéricas que procuramos. Quem estiver interessado em conhecer as tensões de contornamento de cadeias de isoladores por ondas de forma não convencional poderá consultar o artigo de CALDWELL [7].

****

Quando o topo do apoio metálico P_o (figura 2) é atingido pela descarga atmosférica a sua tensão em relação à terra cresce à taxa $i'_o R_t$ [kV. μs^{-1}] em que i'_o [kA. μs^{-1}] é a taxa de crescimento (di_o/dt) da intensidade de descarga e R_t [Ω] a resistência de difusão no terreno. Para simplificar a exposição

FIGURA 2 — Descarga directa sobre um apoio, numa linha sem cabos de guarda



admite-se que a descarga é positiva; o sentido da corrente de descarga é indiferente para as conclusões que se tiram da quantificação adiante apresentada.

A tensão no ponto A (em relação à terra) atinge periodicamente o valor instantâneo (negativo) $u_s = U_{cef.} \sqrt{2} / \sqrt{3}$, em que U_{cef} é o valor eficaz da tensão composta. Se a onda de choque for positiva a cadeia é contornada quando a tensão (positiva) no ponto B (em relação à terra) for

$$u_B = u_c - u_s \qquad (2)$$

se admitirmos que u_c é a tensão de contornamento da cadeia (figura 3).

O contornamento dá-se no instante $\tau_o = u_B / i'_o R_t$ [us]; corresponde ao fecho do interruptor S representado na figura 3.

O contornamento origina ondas transmitidas e reflectidas devidas a três ondas incidentes: a onda $u_i = i_o R_t$ vinda de B; uma onda rectangular de valor u_s incidindo no sentido $P_{1e} P_o$; outra onda rectangular com o mesmo valor u_s incidindo no sentido $P_{1d} P_o$. Destas três ondas incidentes resulta a emissão de três ondas reflectidas e de três ondas transmitidas [1]. O canal do raio-suposto fonte de corrente perfeita — assegura que a corrente i_o continua a crescer linearmente, após o contornamento, à mesma taxa i'_o, com indiferença pelas ondas no sentido AB; no sentido A P_{1d} propagam-se duas ondas transmitidas resultantes uma de u_i e outra de uma das ondas rectangulares, e ainda uma onda reflectida resultante da outra onda rectangular; no sentido A P_{1e} a situação é inteiramente simétrica.

A continuação desta análise tendo em conta as três ondas incidentes e todas as que delas vêm a resultar, não envolve qualquer complexidade conceptual: tratam-se separadamente e sobrepõem-se, em cada ponto e em cada instante os valores resultantes. Todavia este modelo aplicado ao apoio P_o e, com algumas alterações, aos apoios seguintes, conduz a um tratamento analítico desnecessariamente sobrecarregado.

De facto, nos sistemas de média tensão, a tensão u_c é muito superior a u_s; se não considerarmos a tensão de serviço u_s (que mantém um valor praticamente constante durante todo o processo) as conclusões que nesta nota se procuram não se alteram significativamente. Por isso, no que segue, admitiremos $u_s = O$. Fica, todavia, claramente expresso que se faz uma aproximação, embora justificada, e qual é o modelo mais completo.

Após o escorvamento da cadeia o apoio passa a funcionar como um ponto de transição entre o canal do raio, o condutor activo e a resistência R_t. Se admitirmos que o canal do raio funciona como uma fonte de corrente perfeita, o factor de transmissão K'_{to}, em A, é dado por (Apêndice 1),

$$K'_{to} = \frac{Z_o}{Z_o + 2R_t} \qquad (3)$$

em que Z_o é a impedância de choque do condutor activo. As ondas que então se começam a emitir a partir de A tomam abruptamente o valor $u_B K'_{to}$ a partir do qual crescem à taxa $i'_o R_t K'_{to}$. Desprezando a influência de u_s o seu valor inicial será $u_c K'_{to}$.

O crescimento da tensão no apoio para além do valor $u_B K'_{to}$ provoca, muito rapidamente, o contornamento das cadeias nas outras duas fases, nas quais o valor instantâneo da tensão de serviço é $u_s / 2$. Para os valores elevados de i'_o que interessam a esta análise e para as linhas de média tensão, o intervalo entre o escorvaamento na primeira cadeia e

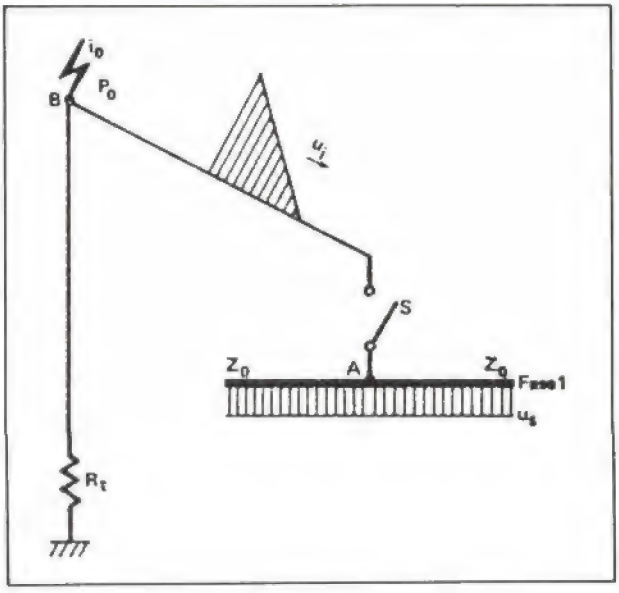


FIGURA 3 — Situação que precede o contornamento da cadeia

nas outras (do mesmo apoio) é medido por um número dígito de centésimos de microsegundo; por isso em nada se alteram as conclusões se for admitido que os três contornamentos são simultâneos e se dão no intante τ_o.

Contornadas as três cadeias de isoladores oferecem-se seis percursos (além de R_t) para a propagação da energia entregue pela descarga. A esta nova situação corresponde um factor de transmissão k_{to}, que também é dado pela expressão 3 desde que a impedância Z_o seja substituída pela impedância de choque Z_{o3} do grupo de três condutores. Esta impedância Z_{o3} pode ser calculada pela aproximação proposta por BEWLEY [8],

$$Z_{o3} \approx \frac{Z_o + 2Z'_o}{3} \qquad (4)$$

em que Z_o e Z'_o são, respectivamente, uma impedância própria e uma impedância mútua entre pares de condutores.

Uma taxa contante i'_o de crescimento da intensidade de descarga conduz a tensões em rampa nas frentes das ondas. Embora as observações experimentais sobre as descargas atmosféricas (particularmente as de KARL BERGER [2]) não confirmem inteiramente esta hipótese, ela afigura-se aceitável para o estudo de que nos estamos a ocupar.

Admite-se que decorrido um tempo $\tau_f = i_{mx} / i'_o$ cessa o crescimento linear da intensidade da descarga mantendo-se esta no valor constante i_{mx}. As duas ondas de tensão emitidas por P_o (a partir do ponto A) e todas as outras a que estas dão origem têm uma duração da frente $t_1 = \tau_f - \tau_o$. Ao extremo i_{mx} de i_o corresponde um extremo, nas ondas de tensão emitidas, com o valor $i_{mx} R_t K_{to}$.

Designemos por T [μ_s] o tempo de propagação entre dois apoios contíguos. No instante $\tau'_1 = \tau_o + T$ inicia-se nos apoios P_{1d} e P_{1e} (figura 2) o crescimento da tensão à taxa $\alpha\ i'_o R_t K_{to}$, a partir de um valor inicial $\alpha\ u_B K_{to}$, sendo α o factor de atenuação correspondente a um vão. Recorda-se que o factor de atenuação α depende do valor da tensão no início do percurso conforme explicita a fórmula empírica de FOUST e MENGER [1] já referida e que conduz a uma aproximação prudente.

Quando a onda de tensão atinge, nos apoios P_{1d} e P_{1e}, o valor u_c (passamos a admitir $u_s = O$), as respectivas cadeias são contornadas. O contornamento dá-se no instante

$$\tau_1 = \tau'_1 + u_c (1 - \alpha K_{to}) / \alpha\ i'_o R_t K_{to} \qquad (5)$$

No instante τ_1 a tensão no apoio P_{1d} (e P_{1e}) baixa para $u_c K_t$. O factor de transmissão neste apoio é dado por

$$K_t = \frac{2R_t}{Z_o + 2R_t} \qquad (6)$$

No instante τ_1 os apoios P_{1d} e P_{1e} emitem, em direcção a P_o, uma onda reflectida com um valor inicial $u_c K_r$ a que segue uma rampa à taxa $\alpha\ i'_o R_t K_{to} K_r$.

$$K_r = -\frac{Z_o}{Z_o + 2R_t} \qquad (7)$$

As ondas reflectidas por P_{1d} (e P_{1e}) chegam a P_o no instante $\tau'_o = \tau_1 + T$. Aí sofrem reflexões e transmissões das quais resulta uma redução da tensão em P_o.

Até ao instante τ_1 (escorvamento em P_{1d} e P_{1e}) as ondas que se propagam para além de P_{1d} e P_{1e}, em direcção a P_{2d} e P_{2e}, são as emitidas inicialmente por P_o embora atenuadas. No instante τ_1 as ondas emitidas para além de P_{1d} e P_{1e}, sofrem uma redução brusca para $u_c K_t$ (como já se referiu) e a partir desse valor crescem a uma taxa $\alpha\ i'_o R_t K_{to} K_t$ até um valor máximo $\alpha\ i_m R_t K_{to} K_t$.

As ondas reflectidas e transmitidas alteram a tensão em P_o e, com um atraso T, a tensão em P_{1d} e P_{1e}. Se o tempo $\tau''_2 = \tau_1 + 3T$ for menor do que o tempo de escorvamento τ_2 em P_{2d} e P_{2e}, este tempo τ_2 é influenciado pelas ondas originadas em P_{1d} e P_{1e}, reflectidas (ou transmitidas) por P_o.

Se em P_{2d} e P_{2e} as cadeias de isoladores forem, também, contornadas (instante τ_2) a tensão nesses apoios baixa para $u_c K_t$ após o que cresce à taxa $\alpha^2\ i'_o R_t K_{to} K^2_t$ (taxa a corrigir se $\tau_2 > \tau''_2$). Mesmo para os valores de i'_o e i_{mx} mais desfavoráveis que é razoável admitir, a taxa de crescimento da tensão que se propaga para além de P_{2d} e P_{2e}, afectada pelo factor K^2_t, é demasiado baixa para se voltar a atingir a tensão de contornamento u_c.

Finalmente nota-se que o escarpamento da frente das ondas que se afastam de P_o, cresce com a resistência de terra R_t: porque cresce o valor inicial do escarpamento $i'_o R_t$; e porque cresce o valor do factor de transmissão K_t (expressão 6).

****

Nas figuras 4, 5 e 6 representa-se, para uma situação particularmente desfavorável, a evolução no tempo das ondas que chegam aos apoios P_o, P_{1d}, P_{1e}, P_{2d} e P_{2e}, ou que deles partem.

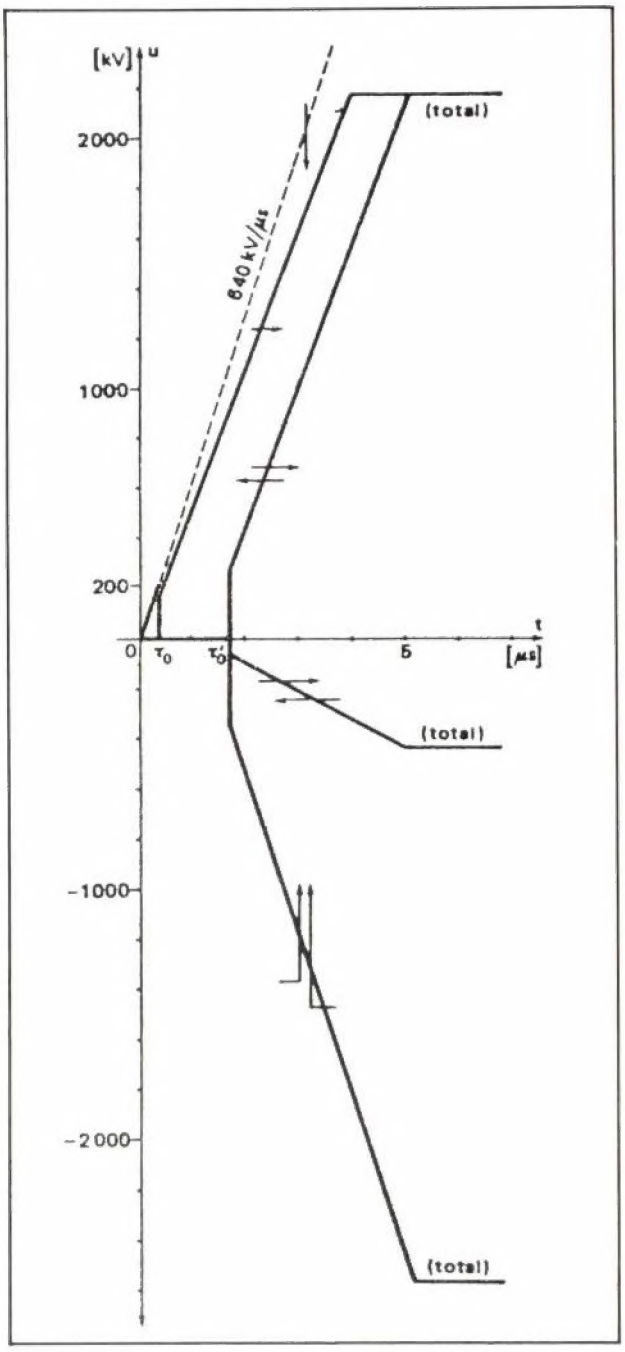


FIGURA 4 — Ondas de tensão em P_o

Admite-se que uma descarga com uma intensidade crescendo à taxa uniforme $i'_o = 32$ kA / μs até ao patamar $i_{mx} = 130$ kA, incide directamente sobre um apoio metálico cuja resistência de difusão no terreno é $R_t = 20\,\Omega$. O apoio pertence a uma linha aérea em que a tensão nominal é $U_{nom} = 15$ kV. Os apoios estão equipados com cadeias (de dois isoladores) cuja tensão de contornamento a seco, sob onda de choque, é $u_c = 200$ kV crista. A distância entre apoio é $s = 200$ m.

A impedância de choque do grupo de três condutores é $Z_{o3} = 200\ \Omega$.

Segundo GOLDE [2] apenas 0,1% das descargas negativas excedem 130 kA (e apenas 5% excedem 80 kA); apenas 5% das descargas excedem 32 kA / μs. Podemos concluir que a situação que se analisou ($i_{mx} = 130$ kA; $i'_o = 32$ kA / μs) é uma situação extrema, globalmente muito desfavorável e muito improvável. A tensão nominal da linha pouco elevada (15 kV) permite o uso de cadeias com pequena tensão de contornamento $u_c = 200$ kV) o que tende a aumentar o número de cadeias contornadas: o isolamento das linhas acompanha o nível das sobretensões de manobra e portanto, nas médias tensões, é, grosseiramente, proporcional à tensão de serviço.

FIGURA 5 — Ondas de tensão em P_{1e} e P_{1d}

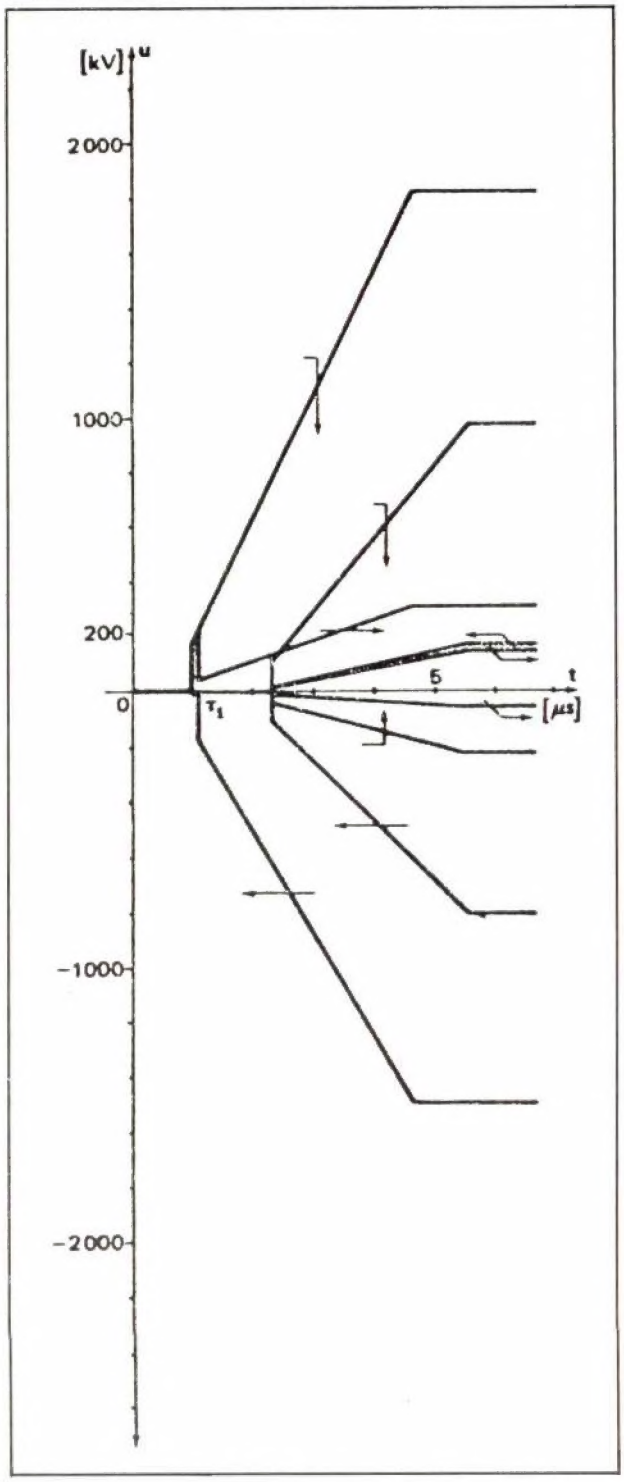
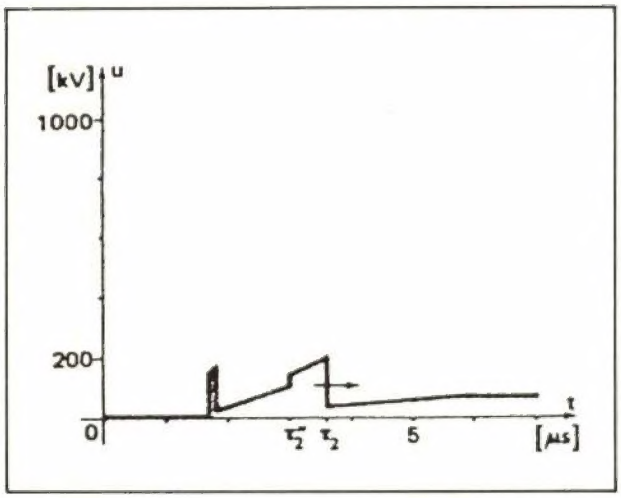


FIGURA 6 — Onda de tensão transmitida para além de P_{2e} e P_{2d}

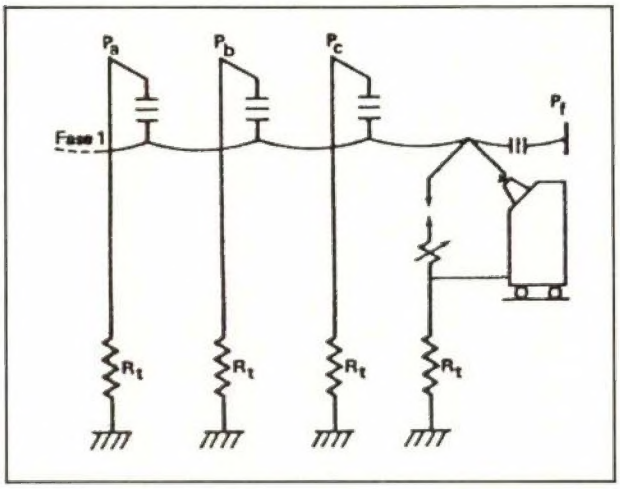


Na situação desfavorável e pouco provável que se acaba de descrever apenas são contornadas as cadeias de dois apoios para cada lado do apoio P_o directamente atingido; a crista da onda que se propaga para além de P_{2d} e P_{2e} já não ultrapassa a tensão de contornamento das cadeias de isoladores, isto qualquer que seja a duração da descarga.

****

Podemos concluir que só descargas nos últimos três vãos junto da instalação terminal podem originar ondas, sobre o pára-raios que protege o transformador, com valor de crista superior ao nível de isolamento da linha (figura 7).

FIGURA 7 — Troço terminal da linha



Para evitar descargas sobre os condutores activos, nestes últimos vãos, aliás muito improváveis como se notou, ocorre imediatamente protegê-los com cabos de guarda. Todavia o exemplo que se quantificou demonstra que não bastará garantir que a descarga se dará sobre o cabo de guarda; é necessário que a elevação transitória da tensão entre o cabo de guarda e os condutores activos não provoque os contornamentos inversos que em P_o introduziram no condutor activo uma onda de tensão de grande amplitude. Por isso podemos também concluir que é essencial baixar suficientemente os valores das resistências de difusão no terreno nos últimos apoios anteriores à amarração terminal.

Poderá sugerir-se que bastaria proteger com cabo de guarda o último vão (impedindo impactes directos sobre o pára-raios) e baixar a resistência de terra do pára-raios, e do apoio que o antecede, para evitar que o nível de isolamento da linha seja ultrapassado. Contudo para esta solução ser eficaz exigiria resistências de terra da ordem de 1 a 2 ohm o que não é em geral praticável realizar nos apoios das redes de distribuição em média tensão.

Para facilitar a dissipação da energia veiculada pela descarga atmosférica é, pois, conveniente estender os cabos de guarda sobre os três últimos vãos adjacentes à instalação terminal. Então a descarga sobre um apoio vai originar ondas que sucessivamente vão causando descargas nos outros apoios; estas descargas iniciam ondas reflectidas que reduzem o efeito limitador da impedância de choque do cabo de guarda, atingindo-se, muito rapidamente, uma situação em que os vários electrodos estarão a descarregar, praticamente em paralelo. Isto reduz as exigências quanto aos valores de R_t em cada apoio, sendo, então, possível usar, nos apoios terminais, electrodos de terra cuja construção, em geral, não levanta dificuldades graves. Acentua-se, todavia, que a eficácia dos cabos de guarda repousa na sua ligação a electrodos com resistência R_t adequada.

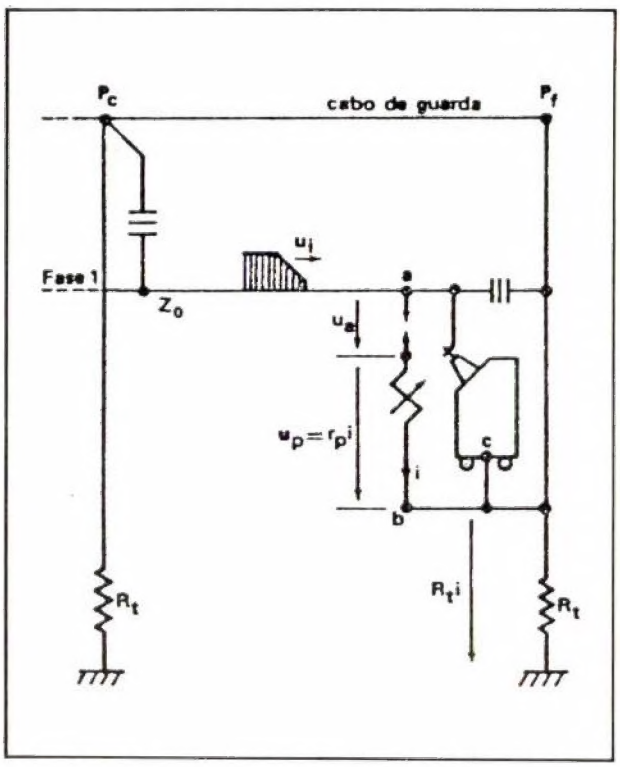
Este efeito dos cabos de guarda é bem conhecido desde os trabalhos de FORTESCUE e BEWLEY e está descrito e quantificado com pormenor no clássico livro de BEWLEY [8]. Melhoramentos no modelo usado por BEWLEY baseiam-se precisamente nas informações e análises a que se referem algumas das publicaçaões indicadas na bibliografia anexa a estas notas.

Não é certo que o cabo de guarda evite o contornamento inverso no apoio P_c no caso de uma descarga de grande intensidade e escarpamento sobre esse apoio, a não ser que a sua resistência de terra seja muito baixa. O pára-raios, instalado em P_f (figura 8), protege com eficácia desigual as cadeias de isoladores de P_f e de P_c. Contudo quando a distância entre P_f e P_c é curta (caso do vão terminal frouxo, por exemplo) os electrodos de terra dos apoios P_f e P_c funcionam em paralelo, praticamente desde os instantes iniciais.

O cabo de guarda quando posicionado de acordo com o modelo electrogeométrico de WHITEHEAD [2], [1], tem a vantagem adicional de evitar os impactes directos sobre os condutores activos. Como já se notou tais impactes são pouco frequentes nas linhas aéreas de média tensão; não obstante a prática garantia de que não são possíveis, melhora a segurança do sistema. Acresce que a cobertura do último vão com um cabo de guarda é a maneira mais simples de impedir descargas directas sobre os pára-raios exteriores instalados na entrada da instalação de alta tensão.

O efeito combinado de baixos valores de R_t com a cobertura por cabos de guarda nos três últimos vãos

FIGURA 8 — Transformador e pára-raios



adjacentes à instalação terminal pode garantir-nos que os valores de crista das ondas que, guiadas pelos condutores activos, chegam à instalação de média tensão, não ultrapassam o nível de isolamento da linha. Isto alivia extremamente a fadiga térmica dos pára-raios como se vai quantificar.

* * * *

Na figura 8 representa-se um pára-raios colocado na extremidade de uma linha. O pára-raios protege um transformador. Admite-se que pára-raios e transformador estão suficientemente próximos e que está suficientemente garantida a equipotencialidade dos seus terminais de terra b e c, para que se possa afirmar que aos isolamentos do transformador é aplicada a tensão que se verificar entre os terminais de linha, a, e de terra, b, do pára-raios.

Se os últimos três vãos da linha aérea estão protegidos por cabos de guarda e se as resistências de difusão no terreno têm valores suficientemente baixos, o valor de crista da onda de tensão que chega ao pára-raios não ultrapassa o nível de isolamento da linha; o acoplamento com o cabo de guarda ainda reduz este valor de crista.

Como é bem conhecido as equações que regem o regime de descarga do pára-raios montado na extremidade da linha são

$$2_{ui} = Z_0 i + u$$
$$u = u_a + r_p i + R_t i \qquad (8)$$

em que a tensão de arco u_a e a resistência interna do pára-raios r_p são funções não lineares de i.

O produto r_p i mede a tensão u_p na resistência do

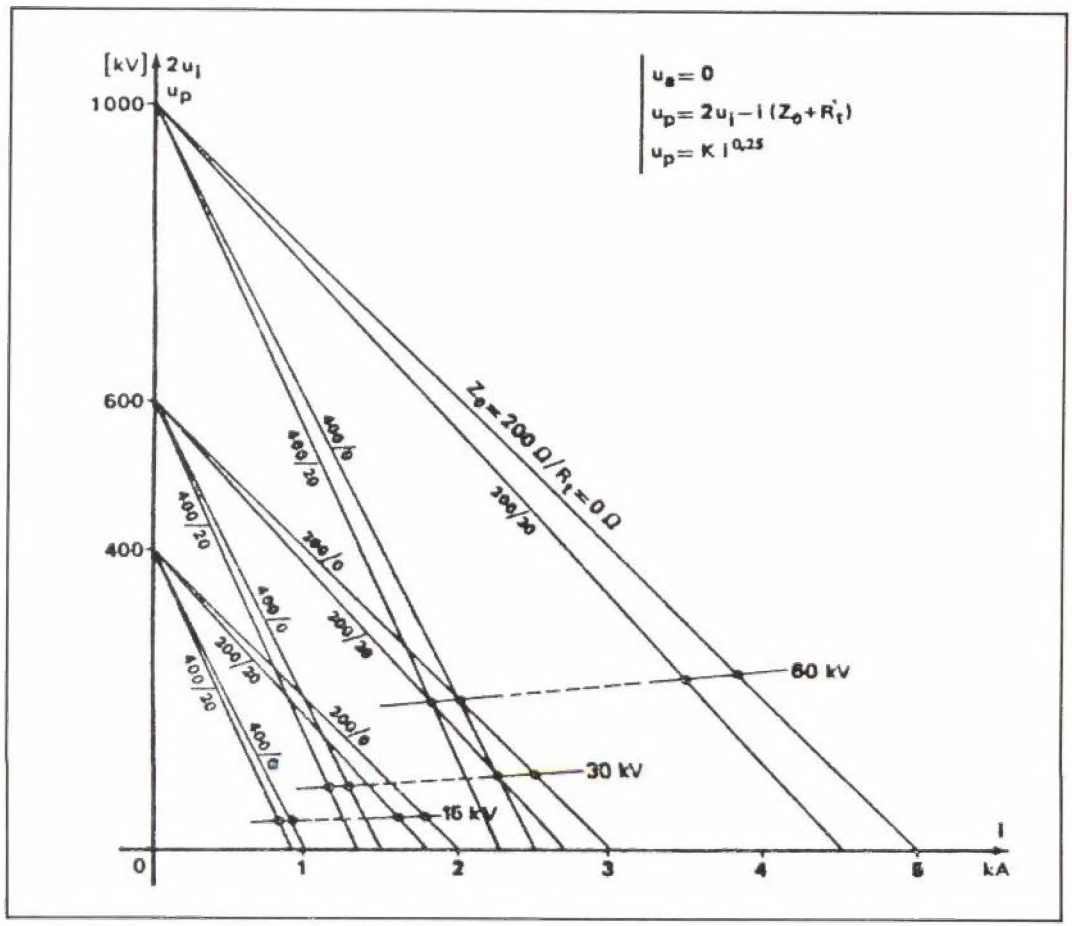


FIGURA 9

Cálculo gráfico das intensidades através dos pára-raios de classe 5 kA